Université Claude Bernard Lyon 1
Licence 1^{re} année de mathématiques : Algèbre 1
Année 2023-2024, automne

Coefficients binomiaux

Dans ce texte, on présente les propriétés essentielles d'une famille de nombres entiers appelés *coefficients binomiaux*. Ils dépendent de deux paramètres entiers : pour n et k fixés, le coefficient correspondant est noté $\binom{n}{k}$. Il est impératif de connaître les résultats résumés au 0° mais on peut tout lire...

0° À retenir absolument

Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. On peut l'exprimer ainsi :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

On a les propriétés suivantes :

(i) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie) ;

(ii) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Pascal) ;

(iii) $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (Newton ; ici, $a, b \in \mathbb{C}$).

NB : Si $k < 0$ ou si $k > n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est nul.

1° Définition et valeurs particulières

Notation. Étant donné $n, k \in \mathbb{Z}$, on note $\displaystyle\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemple. Si un ensemble fini A est inclus dans un ensemble fini B, alors le cardinal de A est inférieur ou égal à celui de B et ces deux cardinaux sont des entiers naturels. Par conséquent,

$$\text{si } \binom{n}{k} \neq 0, \text{ alors } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Exemple. Pour $k = 0$, le seul ensemble ayant 0 élément est l'ensemble vide $\emptyset$. C'est une partie de tout ensemble (y compris de l'ensemble vide), de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Exemple. En particulier, pour $n = 0$, l'ensemble abusivement noté $\{1, 2, \ldots, n\}$, qui est l'ensemble des entiers i tels que $1 \leqslant i$ et $i \leqslant 0$, est l'ensemble vide. On a donc :

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Exemple. Pour $n \geqslant 1$ et $k = 1$, les parties à un élément de $\{1, \ldots, n\}$ sont les n singletons $\{i\}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \binom{n}{1} = n.$$

Exemple. Pour $n \geqslant 2$ et $k = 2$, on veut calculer $\binom{n}{2}$. On commence par dénombrer les couples [1] (a, b) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$. On a n façons de choisir un premier éléments a et $n - 1$ façons de choisir le deuxième éléments b. Cela donne $n(n-1)$ couples.

1. La différence entre un couple (a, b) et une paire $\{a, b\}$, c'est que l'ordre est tenu en compte dans un couple mais pas dans une paire. Autrement dit, si $a \neq b$, on a $(a, b) \neq (b, a)$ alors que $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Chaque couple permet de construire une paire : étant donné un couple (a, b), on forme la paire $\{a, b\}$. Or une paire provient d'exactement deux couples différents : $\{a, b\}$ proient des couples (a, b) et (b, a). Cela montre qu'il y a deux fois moins de paires que de couples. Autrement dit :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2° Expression en termes de factorielles

Proposition. *Soient n et k deux entiers. Alors*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Si $0 \leqslant k \leqslant n$, on peut vérifier que $n! = n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)!$ et simplifier :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Esquisse de preuve[2]. On commence par dénombrer les arrangements de k parmi n, c'est-à-dire les listes ordonnées $(a_1, \ldots, a_k)$ formées de k éléments deux à deux distincts de $\{1, \ldots, n\}$. On a d'abord n choix pour a_1 ; restent $n-1$ choix pour a_2 (tous sauf a_1), puis $n-2$ choix pour a_3 (tous sauf a_1 et a_2), etc., et enfin $n-k+1$ choix pour a_k (tous sauf $a_1, \ldots, a_{k-1}$). Au bilan, cela donne $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ choix. Ce nombre est égal à $n!/(n-k)!$, comme on l'a déjà remarqué.
Pour chaque arrangement, on forme une partie à k éléments en oubliant l'ordre. Le nombre d'arrangements (de k parmi n) qui donnent une partie donnée est le nombre de façon d'ordonner les k éléments de la partie, ce qui est exactement la donnée d'un arrangement de k parmi k. D'après le premier paragraphe, il y a $k!/(k-k)! = k!$ ordres possibles.
Au bilan, le nombre de parties est donc le nombre d'arrangements de k parmi n divisé par $k!$, ce qui donne l'expression annoncée. □

Exemple (petites valeurs de n). Il est habituel de présenter les coefficients binomiaux dans un tableau triangulaire infini dont on donne deux visualisation ci-dessous. On l'appelle *triangle de Pascal* (figure 1). Il est recommandé de connaître les premières lignes par cœur : 1, 11, 121, 1331, 14641.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

FIGURE 1 – Triangle de Pascal

2. La rédaction est très informelle mais on peut la rendre rigoureuse...

Exemple (petites valeurs de k). Pour $k = 0$, 1, 2 ou 3, on retrouve bien ou on trouve

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1\ ;\\
\binom{n}{1} &= \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n\ ;\\
\binom{n}{2} &= \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}\ ;\\
\binom{n}{3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.
\end{aligned}$$

3° Propriétés essentielles

Proposition. *Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On a :*

(i) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *(symétrie) ;*

(ii) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ *(relation du triangle de Pascal).*

Remarque. (i) La première relation exprime la symétrie du triangle de Pascal par rapport à la droite verticale mené à partir de $\binom{0}{0}$.

(ii) La dénomination « triangle de Pascal » vient de la présentation suivante des coefficients binomiaux dans un tableau triangulaire infini : la relation de Pascal exprime qu'un coefficient binomial est la somme des deux qui sont au-dessus de lui dans le triangle (figure 2).

$$\begin{array}{ccc}
\binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} \\
 & \binom{n}{k} &
\end{array}$$

FIGURE 2 – Relation du triangle de Pascal

Esquisse de preuve. (i) On commence par remarquer que $0 \leqslant k \leqslant n$ SSI $0 \leqslant n-k \leqslant n$. Pour montrer l'égalité du point de vue combinatoire, il revient au même de choisir une partie à k éléments et de choisir le complémentaire de cette partie, qui est une partie à $n-k$ éléments. Pour la montrer du point de vue algébrique, on calcule :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

(ii) Combinatoirement, la formule vient de la remarque suivante. Pour une partie de $\{1, \ldots, n\}$, de deux choses l'une :

— soit la partie contient n, alors elle est déterminée par les $k-1$ autres éléments, qui forment une partie de $\{1, \ldots, n-1\}$: il y a $\binom{n-1}{k-1}$ parties de ce type ;

— soit la partie ne contient pas n, alors c'est une partie à k éléments de $\{1, \ldots, n-1\}$: il y a $\binom{n-1}{k}$ parties de ce type.

Au total, il y a donc $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ parties à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$: ce nombre est égal à $\binom{n}{k}$.

Algébriquement, on calcule, si $0 \leqslant k-1 \leqslant n-1$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, c'est-à-dire $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k) \cdot (k-1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right] \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Pour terminer, il faut considérer les cas $k = 0$ et $k = n$, car l'un des deux coefficients binomiaux du membre de droite s'annule et la formule avec les factorielles ne s'applique pas ; dans ces cas, l'égalité à montrer se réduit à $1 = 1$. □

Théorème (binôme de Newton)**.** *Soit n un entier naturel et soient a et b deux complexes. Alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple. Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, on retrouve (en écrivant les termes par valeurs décroissantes de k) :

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \text{ ;} \\
(a+b)^1 &= \binom{1}{1} a^1 b^0 + \binom{1}{0} a^0 b^1 = a + b \text{ ;} \\
(a+b)^2 &= \binom{2}{2} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{0} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ ;} \\
(a+b)^3 &= \binom{3}{3} a^3 b^0 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{0} a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \text{ ;} \\
(a+b)^4 &= \binom{4}{4} a^4 b^0 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{0} a^0 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Esquisse de démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la propriété est évidente, comme on l'a vu dans l'exemple ci-dessus.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$. On calcule alors, en faisant un développement, puis un changement d'indice dans la première somme, en réglant les zones de somma-

tion et en utilisant la relation du triangle de Pascal :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} \\
&= a(a+b)^{n-1} + b(a+b)^{n-1} \\
&= a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-1-k} + b\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{k+1}b^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}a^j b^{n-j} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-k} && (j = k+1) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n-1}{j-1}a^j b^{n-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} && \left(\binom{n-1}{-1} = 0 = \binom{n-1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right]a^k b^{n-k} && (j \leftarrow k) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} && \text{(Pascal).} \qquad \square
\end{aligned}
$$