

Résumé de CM2

Les notations Σ et Π avec quelques propriétés de base

Soient $0 \leq m \leq n$ des entiers naturels, et soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des nombres réels. On définit la *somme des a_k pour k variant de m à n* par

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

On pourra aussi écrire cette somme par

$$\sum_{m \leq k \leq n} a_k.$$

Soient $b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$ des nombres réels, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k, \quad \sum_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k.$$

Ces deux propriétés s'appellent la **linéarité** de $\sum_{k=m}^n$. De même, le *produit des a_k pour k variant de m à n* est défini par

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n.$$

On pourra aussi écrire cette somme par

$$\prod_{m \leq k \leq n} a_k.$$

On a

$$\prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \left(\prod_{k=m}^n b_k \right), \quad \prod_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k.$$

Voici quelques formules à retenir:

1. (suite arithmétique) Soient $a, d \in \mathbb{R}$ tels que $a_k = a + (k-1)d$. Alors,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d).$$

2. (suite géométrique) Soient $a, r \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tels que $r \neq 1$ et $a_k = ar^{k-1}$.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Preuve. Montrons 1. Posons $S = \sum_{k=1}^n a_k$. Comme

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 = \sum_{l=1}^n a_{n+1-l},$$

(on a fait le changement d'indice k par $n+1-l$), on a

$$2S = S + S = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^n (a_k + a_{n+1-k}).$$

Puisque

$$\begin{aligned} a_k + a_{n+1-k} &= (a + (k-1)d) + (a + (n-k)d) \\ &= 2a + ((k-1) + (n-k))d = 2a + (n-1)d, \end{aligned}$$

(cette dernière est *indépendant* de k !), on en déduit que

$$2S = \sum_{k=1}^n (2a + (n-1)d) = n(2a + (n-1)d), \quad \text{i.e.,} \quad S = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d).$$

Montrons 2. Posons $S = \sum_{k=1}^n a_k$. Alors, on a

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}, \\ rS &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n. \end{aligned}$$

Calculons la différence, on en déduit que

$$(1-r)S = a - ar^n = a(1-r^n), \quad \text{i.e.,} \quad S = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}.$$

□

La troisième formule, un peu générale, est **sommes télescopiques**: c'est la somme de forme

3. $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1})$ avec deux entiers $m \leq n$. On a

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}.$$

En effet, on a

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1}) = (a_m - \textcolor{red}{a}_{m-1}) + (a_{m+1} - a_m) + \cdots + (\textcolor{red}{a}_n - a_{n-1}) = a_n - a_{m-1}.$$

Exemple. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme

$$\begin{aligned} & \textcolor{blue}{k(k+1)(k+2) \cdots (k+m-1)(k+m)} - (k-1)\textcolor{blue}{k(k+1) \cdots (k+m-1)} \\ &= (m+1)\textcolor{blue}{k(k+1)(k+2) \cdots (k+m-1)}, \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+m-1) = \frac{1}{m+1} \cdot n(n+1) \cdots (n+m).$$

Voyons un cas particulier $m = 2$. D'après cette formule, on a

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

La formule pour la suite arithmétique ($a = d = 1$) implique que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n (k(k+1) - k) = \sum_{k=1}^n k(k+1) - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2(n+2) - 3) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Cette formule est à retenir.