Résumé de CM3

Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés **éléments**, qui sont clairement définis. Cette (pseudo-)définition est très ambiguë, mais on se content de ça pour le moment. $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ signifie que E est un ensemble dont les éléments sont $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ et x_n. On dit que x_i $(1 \leq i \leq n)$ **appartient** à l'ensemble E, noté $x_i \in E$ ou $E \ni x_i$.

Remarque. Le fameux **paradoxe de Russell**, découvert en 1901, est formulé ainsi: **l'ensemble des ensemble n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ?** E. Zermelo a proposé une théorie axiomatique des ensembles en 1908, sur laquelle A. Fraenkel a rajouté deux autres axiomes en 1922. Leur théorie, appelée la théorie **ZF**, avec ou sans l'axiome de choix (**C**), fait une base des mathématiques d'aujourd'hui. $\square$

Exemples.

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$: l'ensemble des entiers naturels,
2. $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$: l'ensemble des entiers relatifs,
3. $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b \neq 0 \right\}$: l'ensemble des fractions rationnelles.
4. $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels (construction à voir plus tard !)

Le dernier exemple est le **vide** , noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément. $\square$

Pour simplifier les écritures, on utilise des **quantificateurs** suivants:

- $\forall$ = pour tout.e.s (ou tous).
- $\exists$ = il.s existe.nt, $\nexists$ = il.s n'existe.nt pas.

Soient A et B deux ensembles. On dit que

1. l'ensemble A est **inclu** dans l'ensemble B $\overset{\text{déf.}}{\iff}$ $\forall\, x \in A,\ x \in B$.
   Dans ce cas, on dit aussi que A est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de B.
   On le note par $A \subset B$, $A \subseteq B$, $B \supset A$ ou bien $B \supseteq A$.
2. les ensembles A et B sont **égaux** lorsque $A \subset B$ et $A \supset B$ en même temps.
   On le note par $A = B$.

N.B. Pour tout ensemble E, le vide $\emptyset$ est une partie de E. $\square$

Soit E un ensemble.

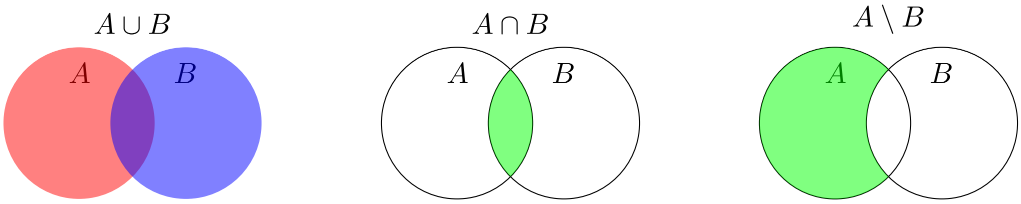
1. Soit A une partie de E. Le **complémentaire** de A (dans E), noté A^c, est la partie de E définie par
$$\{\, x \in E \,|\, x \notin A \,\}.$$
2. L'ensemble des parties, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble défini par
$$\{\, A \,|\, A \subset E \,\}.$$
   En particulier, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

Opérations sur ensembles

Soient A et B deux ensembles.

1. La **réunion** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par
$$\{x \,|\, x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$
2. L'**intersection** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par
$$\{x \,|\, x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$
3. La **différence** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \setminus B$, défini par
$$\{x \in A \,|\, x \notin B\}.$$

Voici les diagrammes de Venn de la réunion $A \cup B$, l'intersection $A \cap B$ et la différence $A \setminus B$:



Voici quelques propriétés importantes:

1. Soient A, B, C et D ensembles.
   i) Si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors on a $A \cup B \subset C$, et
   ii) si $D \subset A$ et $D \subset B$, alors on a $D \subset A \cap B$.
2. Soient A, B et C ensembles.
   i) (Associativité)
   $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$
   ii) (Distributivité)
   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
3. Soit E un semble et soient A et B deux parties de E. Alors, on a
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = (A^c \cup B^c).$$

Applications

Une **application** est la donnée de deux ensembles E et F et de flèche $f : E \to F$ qui associe à chaque élément de E un (unique) élément de F. Lorsque un élément x de E est associé à un élément, disons y, de F, on la note $y = f(x)$. On dit que y est l'**image** de x et x est un **antécédent** de y.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. L'application f est dite **injective** lorsque, pour deux éléments x et y de E, $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$.

2. L'application f est dite **surjective** lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent.

3. L'application f est dite **bijective** lorsque elle est injective et surjective en même temps.

Remarque. Avec les quantificateurs, on pourra écrire ces définitions comme suit:

1. f: injective $\overset{\text{déf.}}{\iff} \forall\, x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y.$

2. f: surjective $\overset{\text{déf.}}{\iff} \forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E\ f(x) = y.$

3. f: bijective $\overset{\text{déf.}}{\iff} \forall\, y \in F,\ \exists!\, x \in E\ f(x) = y.$