Résumé de CM4

Composée d'applications

Soient E, F et G ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux application. Alors, on peut définir l'application de E dans G appelée la **composée** de f et g , notée $g \circ f$, définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in E.$$

Voici quelques propriétés: soient E et F deux ensembles et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow F$ deux applications.

1. Lorsque $g \circ f$ est injective, f est injective.

Preuve. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Par définition, on a

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y).$$

L'application $g \circ f$ étant injective, on en déduit que $x = y$, d'où f est injective.

2. Lorsque $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

Preuve. Soit y un élément de G . L'application $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, d'où $f(x) \in F$ est un antécédent de y par g , i.e., g est surjective.

En particulier,

3. lorsque $g \circ f = \text{Id}_E$, où $\text{Id}_E : E \rightarrow E; x \mapsto x$ est l'**application identité**, f est injective et g est surjective. Donc,

4. lorsque $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$, les applications f et g sont bijectives.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Pour une partie $A \subset E$, la partie de F définie par $\{f(x) \mid x \in A\}$ s'appelle l'**image directe** de A , notée $f(A)$.
2. Pour une partie $B \subset F$, la partie de E définie par $\{x \mid f(x) \in B\}$ s'appelle l'**image réciproque**, notée $f^{-1}(B)$.

□

Voici quelques propriétés: soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Soient A_1 et A_2 deux parties de E .

i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

ii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

iii) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

2. Soient B_1 et B_2 deux parties de F .

i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

iii) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

3. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \quad B \supset f(f^{-1}(B)).$$

Une preuve de ces énoncés est un bon exercice à travailler !