Résumé de CM6

Nombres complexes

On a traité brièvement les systèmes de nombres:

$$(\mathbb{N}, +, \times) \quad \longrightarrow \quad (\mathbb{Z}, +, \times) \quad \longrightarrow \quad (\mathbb{Q}, +, \times) \quad \longrightarrow \quad (\mathbb{R}, +, \times)$$

suivant le souhait de gagner une liberté de certains de ces opérations $+$ et $\times$ sauf le dernier, où on souhaite avoir une stabilité par rapport à la $\ll$ lim $\gg$.

L'étape suivante est non-triviale; on veut résoudre équations algébriques, en particulier, une équation de seconde degré $ax^2 + bx + c = 0$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Pour cela, créons $i = \sqrt{-1}$!

Considérons l'ensemble

$$\mathbb{C} := \{\, a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \,\},$$

avec le symbol i qui vérifie $i^2 = -1$. On considère deux opérations; la somme $+$ et le produit $\times$ ou $\cdot$, définies par

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &:= (a + c) + (b + d)i,\\ (a + bi) \cdot (c + di) &:= (ac - bd) + (ad + bc)i,\end{aligned}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ces opérations vérifient les axiomes suivants:

1. Par rapport à la somme $+$:
   - i)$_+$ (Associativité) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
   - ii)$_+$ (Élément neutre) $z + 0 = 0 + z = z$ où $0 := 0 + 0i$.
   - iii)$_+$ (Symétrique) $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\exists\, z' \in \mathbb{C}$ tel que $z + z' = z' + z = 0$.
     Cet élément z' sera noté $-z$.
   - iv)$_+$ (Commutativité) $z + w = w + z$.
2. Par rapport au produit $\times$:
   - i)$_\times$ (Associativité) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
   - ii)$_\times$ (Élément neutre) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ où $1 := 1 + 0i$.
   - iii)$_\times$ (Symétrique) $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exists\, z' \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot z' = z' \cdot z = 1$.
     Cet élément z' sera noté z^{-1}.
   - iv)$_\times$ (Commutativité) $z \cdot w = w \cdot z$.
3. (Distributivité):

$$(z_1 + z_2) \cdot w = z_1 \cdot w + z_2 \cdot w, \qquad w \cdot (z_1 + z_2) = w \cdot z_1 + w \cdot z_2.$$

On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

Remarque. En 1843, le mathématicien irlandais W. Hamilton eut découvert un nombre, appelé **quaternion**. L'ensemble de tels nombres, noté $\mathbb{H}$ est un $\ll$ doublage $\gg$ de $\mathbb{C}$:

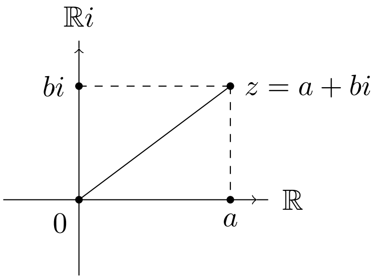
$$\mathbb{H} = \{\, a + bi + cj + dk \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \,\}$$

avec les symbols i, j et k vérifiant

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

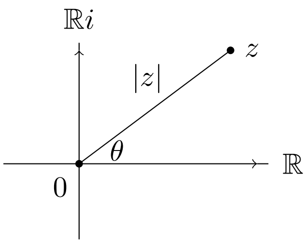
On pourra montrer que c'est un **corps non commutatif**. $\square$

Via l'application bijective $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $z = a + bi \mapsto (a, b)$, on peut représenter des nombres complexes sur un plan $\mathbb{R}^2$ (plan complexe):



Les nombres réels a et b, notés Rez et Imz, sont appelés la **partie réelle** et la **partie imaginaire**, respectivement. Le nombre complexe $a - bi$ est dit le **conjugé** du nombre complexe z, noté par $\overline{z}$.

Pour le nombre complexe $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ est dit le **module** du nombre complexe z, noté par $|z|$, et l'angle θ dans le dessin ci-dessous s'appelle un **argument** du nombre complexe z, noté par $\arg(z) = \theta$.



<u>**N.B.**</u> Plus précisément, tenant en compte de rotations, il faut dire que $\arg(z) \equiv \theta \mod 2\pi$. $\square$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Posons $r_k = |z_k|$ et $\theta_k = \arg(z_k)$ $(k = 1, 2)$. Alors, par définition, on a $z_k = r_k(\cos\theta_k + i \sin\theta_k)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} z_1 z_2 =& r_1 r_2 \left((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2) \right) \\ =& r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned}$$

i.e., on a

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

En particulier, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$. Alors, le calcul ci-dessus montre que cette fonction vérifie l'égalité suivante:

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta).$$

Ça fait penser à une fonction exponentielle ? En effet, le mathématicien suisse L. Euler (1707 - 1783) a découvert la formule suivante, qui porte son nom :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Équation algébrique

Rappelons que notre point de départ pour une introduction de nombres complexes était de résoudre une équation algébrique de second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ quelconque. En effet, les racines de cette équation sont $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, où $\Delta := b^2-4ac$ est le **discriminant** de cette équation. Lorsque $\Delta<0$, il nous suffit de mentioner que $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-\Delta}\cdot i$! (Dans $\mathbb{C}$, on peut donc résoudre n'importe quelle équation de second degré avec les **coefficients réels**.)

Alors, que se passe-t-il sur une équation algébrique de second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) avec les **coefficients complexes** ? Dans ce cas, le seul terme qu'il faut traiter en détail est, encore !, le discriminant Δ; cette-fois ci, Δ est un nombre complexe et il faut considérer les **racines carrées** d'un nombre complexe.

Racine carrée: Pour $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, calculons les racines carrées avec deux méthodes différentes.

1$^{\text{ère}}$ méthode. Notons $w=p+qi$ avec $p,q\in\mathbb{R}$. Soit $z=a+bi$ ($a,b\in\mathbb{R}$) un nombre complexe vérifiant $w=z^2$. Or $z^2=(a+bi)^2=a^2+(bi)^2+2abi=a^2-b^2+2abi$, par identification, on a $a^2-b^2=p$ et $2ab=q$. De plus, comme $|w|=|z^2|=|z|^2=a^2+b^2$, On obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} a^2-b^2=p, \\ 2ab=q, \\ a^2+b^2=|w|. \end{cases}$$

Par la première et la troisième, on obtient

$$a^2=\frac{|w|+p}{2} \quad \& \quad b^2=\frac{|w|-p}{2}, \qquad \text{i.e.,} \qquad a=\pm\sqrt{\frac{|w|+p}{2}}, \quad \& \quad b=\pm\sqrt{\frac{|w|-p}{2}}.$$

Reste à utiliser la deuxième équation pour déterminer quelle combinaison des signe $\pm$ sont possible; on trouve les deux racines carrées de w ainsi.

2$^{\text{ème}}$ méthode. Travaillons avec la forme exponentielle: $w=Re^{i\theta}$ ($R\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$). Cherchons $z=re^{i\varphi}$ ($r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi\in\mathbb{R}$) vérifions $w=z^2$. Or $z^2=r^2e^{2\varphi i}$, on a

$$R=|w|=|z^2|=|z|^2=r^2 \quad \text{i.e.,} \quad r^2=R,$$

d'où $r=R^{\frac{1}{2}}=\sqrt{R}$. Ensuite, $w=z^2$ implique que $Re^{\theta i}=r^2e^{2\varphi i}=Re^{2\varphi i}$, i.e., $e^{\theta i}=e^{2\varphi i}$. En tenant en compte du fait que la fonction $\theta\longmapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, i.e., $e^{(\theta+2\pi)i}(=e^{\theta i}\cdot e^{2\pi i})=e^{\theta i}$ d'après la formule d'Euler, l'égalité $e^{\theta i}=e^{2\varphi i}$ implique

$$2\varphi=\theta+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \qquad \text{i.e.,} \qquad \varphi=\frac{1}{2}\theta+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Que signifie-t-il ? Par définition, $e^{\varphi i}=e^{\frac{1}{2}\theta i}\cdot e^{k\pi i}$ ($k\in\mathbb{Z}$). Puisque $e^{k\pi i}=(e^{\pi})^k=(-1)^k$, on en déduit que les deux racines carrées du nombre complexe $w=Re^{i\theta}$ sont

$$\pm R^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\theta i}.$$

Dans tous les cas, les racines carrées d'un nombres complexes sont nombres complexes. Par conséquence, les racines d'une équation algébrique de second degré sont encore nombres complexes.