

---

**Exercices**

---

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

**Exercice 1** Montrer la formule suivante par récurrence :

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

**Exercice 2** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z^2 - (2 + 3i)z$ .

1. Calculer les antécédents de  $17 - 7i$  par  $f$ .
2. Pour chaque  $w \in \mathbb{C}$ , donner combien de solutions distinctes  $z \in \mathbb{C}$  de l'équation  $f(z) = w$ .
3. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifiez vos réponses.

**Exercice 3**

1. Calculer le PGCD de 688 et 432.
2. Trouver une solution particulière  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$  de l'équation  $688x + 432y = 32$ .
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne  $43x + 27y = 2$ .

**Exercice 4** Soient  $P$  et  $Q$  les polynômes réels :

$$P = 2X^3 - 3X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad Q = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1.$$

1. Déterminer le PGCD de  $P$  et  $Q$ .
2. Factoriser les polynômes  $P$  et  $Q$ .
3. En déduire le PPCM de  $P$  et  $Q$ .

**Exercice 5** Calculer le reste de la division euclidienne de  $18^{2024}$  par 11.