Exercices
CORRECTION

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Montrer la formule suivante par récurrence :

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1). \tag{1}$$

Correction. Montrons la formule (1) par récurrence.

(Initialisation) Par définition,

$$\frac{1}{30} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) \cdot (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1) = \frac{1}{30} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = \frac{1}{30} \cdot 30 = 1$$

et $1^4 = 1$, d'où (1) est vraie pour $n = 1$.

(Hérédité) Supposons que la formule (1) est vraie en rang n . En rang $n + 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^4 &= \sum_{k=1}^n k^4 + (n+1)^4 \\ &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) + (n+1)^4 \quad (\text{Par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{1}{30}(n+1)\left(n(2n+1)(3n^2+3n-1) + 30(n+1)^3\right). \end{aligned}$$

Donc, il faut vérifier que

$$\begin{aligned} n(2n+1)(3n^2+3n-1) + 30(n+1)^3 &= ((n+1)+1)(2(n+1)+1)(3(n+1)^2+3(n+1)-1) \\ &= (n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5). \end{aligned}$$

En effet, développant les deux côtés, on obtient $6n^4 + 39n^3 + 91n^2 + 89n + 30$. On en déduit que la formule (1) est vraie en rang $n + 1$.

Donc, par récurrence, on en déduit que la formule (1) est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2 - (2 + 3i)z$.

- Calculer les antécédents de $17 - 7i$ par f .

Correction. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 17 - 7i$. Par définition, le nombre z vérifie l'équation $z^2 - (2 + 3i)z - (17 - 7i) = 0$. Soit D le discriminant de cette équation. Alors,

$$\begin{aligned} D &= (-(2 + 3i))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-(17 - 7i)) = (2 + 3i)^2 + 4 \cdot (17 - 7i) \\ &= 4 + 12i - 9 + 68 - 28i = 63 - 16i. \end{aligned}$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a + bi)^2 = 63 - 16i$. Alors, comme $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, et

$$a^2 + b^2 = |63 - 16i| = \sqrt{63^2 + 16^2} = \sqrt{4225} = 65,$$

on a

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 63, \\ 2ab = -16, \\ a^2 + b^2 = 65. \end{cases}$$

D'après la première et la troisième, on obtient $a^2 = 64$ et $b^2 = 1$. La deuxième implique que $ab < 0$, d'où on obtient $(a, b) = (8, -1), (-8, 1)$. Donc, les racines carrées de D sont $\pm(8 - i)$. Donc les nombres complexes z vérifiant $f(z) = 17 - 7i$ sont

$$\frac{(2 + 3i) + (8 - i)}{2} = 5 + i \quad \text{et} \quad \frac{(2 + 3i) - (8 - i)}{2} = -3 + 2i.$$

2. Pour chaque $w \in \mathbb{C}$, donner combien de solutions distinctes $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = w$.

Correction. L'équation $f(z) = w$ est équivalente à l'équation $z^2 - (2 + 3i)z - w = 0$. Soit D le discriminant de cette équation. Par définition, on a

$$D = (2 + 3i)^2 - 4w = -5 + 12i - 4w.$$

Lorsque $D = 0$, i.e., $w = \frac{-5 + 12i}{4}$, il y a un seul nombre complexe z vérifiant $f(z) = w$. Sinon, i.e., lorsque $w \neq \frac{-5 + 12i}{4}$, il y a deux nombres complexes z vérifiant $f(z) = w$.

3. L'application f est-elle injective? surjective? bijective? Justifiez vos réponses.

Correction. D'après la question précédente, pour chaque $w \in \mathbb{C}$, il existe au moins un antécédente par l'application f d'où f est surjective. Par contre, il existe des cas où $w \in \mathbb{C}$ admet deux antécédents, d'où l'application f n'est pas injective, hence non plus bijective.

Exercice 3

1. Calculer le PGCD de 688 et 432.

Correction. D'après l'algorithme d'Euclide,

$$688 = 1 \cdot 432 + 256$$

$$432 = 1 \cdot 256 + 176$$

$$256 = 1 \cdot 176 + 80$$

$$176 = 2 \cdot 80 + 16$$

$$80 = 5 \cdot 16$$

d'où le PGCD de 688 et 432 est 16.

2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $688x + 432y = 32$.

Correction. Calculons une identité de Bézout. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} 16 &= 176 - 2 \cdot 80 = 176 - 2 \cdot (256 - 1 \cdot 176) \\ &= (-2) \cdot 256 + 3 \cdot 176 = (-2) \cdot 256 + 3 \cdot (432 - 1 \cdot 256) \\ &= 3 \cdot 432 - 5 \cdot 256 = 3 \cdot 432 - 5 \cdot (688 - 1 \cdot 432) \\ &= (-5) \cdot 688 + 8 \cdot 432, \end{aligned}$$

d'où on obtient une identité de Bézout $688 \cdot (-5) + 432 \cdot 8 = 16$. Puisque $32 = 2 \cdot 16$, il suffit de multiplier l'identité ci-obtenue par 2 :

$$2(688 \cdot (-5) + 432 \cdot 8) = 688 \cdot (2 \cdot (-5)) + 432 \cdot (2 \cdot 8) = 32,$$

d'où on obtient une solution particulière $(x_0, y_0) = (-10, 16)$ de l'équation en question.

3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $43x + 27y = 2$.

Correction. Divisant les deux côtés de l'équation $688x + 432y = 32$ par 16, on obtient $43x + 27y = 2$. Donc, la solution particulière (x_0, y_0) que l'on a obtenu à la question précédente est aussi une solution particulière de l'équation $43x + 27y = 2$. Soustrayant $43x_0 + 27y_0 = 2$ de $43x + 27y = 2$, on obtient

$$43(x - x_0) + 27(y - y_0) = 0.$$

Puisque 43 et 27 sont premiers entre eux, le Lemme de Gauss implique qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 27k$. Donc, l'équation ci-dessus implique que $43 \cdot 27k + 27(y - y_0) = 0$, d'où $y - y_0 = -43k$. On en déduit que pour toute solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation en question, il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x, y) = (x_0 + 27k, y_0 - 43k) = (-10 + 27k, 16 - 43k)$. Il est clair que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(x, y) = (-10 + 27k, 16 - 43k)$ est une solution de l'équation en question. En effet, on a $43(-10 + 27k) + 27(16 - 43k) = -430 + 432 = 2$. On en déduit que les solutions de l'équation en question est

$$(x, y) = (-10 + 27k, 16 - 43k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 4 Soient P et Q les polynômes réels :

$$P = 2X^3 - 3X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad Q = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1.$$

1. Déterminer le PGCD de P et Q .

Correction. Par la division euclidienne de les polynômes Q par P , on a

$$Q = 1 \cdot P + 6X^2 + 3X + 3 = P + 3 \cdot (2X^2 + X + 1),$$

et la division euclidienne de P par le polynôme $2X^2 + X + 1$ nous donne $P = (2X^2 + X + 1)(X - 2)$. On en déduit que le PGCD de P et Q est le polynôme unitaire $\frac{1}{2}(2X^2 + X + 1) = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$.

2. Factoriser les polynômes P et Q .

Correction. Le polynôme $2X^2 + X + 1$ étant un diviseur en commun des polynômes P et Q , il suffit d'effectuer les divisions euclidiennes de P et Q par $2X^2 + X + 1$:

$$P = (2X^2 + X + 1)(X - 2) \quad \text{et} \quad Q = (2X^2 + X + 1)(X + 1).$$

3. En déduire le PPCM de P et Q .

Correction. Le PPCM est un polynôme unitaire qui est un multiple commun de P et Q , il est donné par

$$\frac{1}{2}(2X^2 + 1)(X - 2)(X + 1).$$

Exercice 5 Calculer le reste de la division euclidienne de 18^{2024} par 11.

Correction. 1^{ère} méthode. Comme 11 est un nombre premier et que 11 ne divise pas 18, d'après le petit théorème de Fermat, on a $18^{10} \equiv 1[11]$. Donc, $18^{2024} = 18^{10 \cdot 202 + 4} \equiv 18^4[11]$. Comme $18 \equiv 7[11]$, $18^2 \equiv 7^2 \equiv 5[11]$, d'où $18^4 = (18^2)^2 \equiv 5^2[11] \equiv 3[11]$.

2^{ème} méthode. Par définition, $18 \equiv 7[11]$. Alors, $18^2 \equiv 7^2 = 5[11]$, $18^4 \equiv 5^2 = 3[11]$ et $18^5 = 18^4 \cdot 18 \equiv 3 \cdot 7 \equiv 21 \equiv -1[11]$, d'où $18^{10} \equiv 1[11]$. Donc, $18^{2024} = 18^{10 \cdot 202 + 4} \equiv 18^4[11]$. Comme $18 \equiv 7[11]$, $18^2 \equiv 7^2 \equiv 5[11]$, d'où $18^4 = (18^2)^2 \equiv 5^2[11] \equiv 3[11]$.