**Exercice**

CORRECTION

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

## Exercice 1 Somme

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Appelons la formule ci-dessus $F_n$.
(Initialisation). $\sum_{k=1}^{1}(k-1)k(k+1) = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$ et $\frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0$, donc $F_0$ est valide.
(Hérédité). Supposons que la formule est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. En rang $n+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)k(k+1) =& \sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) + \underbrace{((n+1)-1)(n+1)((n+1)+1)}_{k=n+1} \\
=& \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) \qquad \text{(hypothèse de reccurence)} \\
=& \left(\frac{1}{4}(n-1)+1\right)n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \\
=& \frac{1}{4}((n+1)-1)(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2),
\end{aligned}$$

d'om la formule $F_{n+1}$ est valide.
Ainsi par recurrence sur $n$, la formule $F_n$ est valide pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire la valeur, pour tout entier $n \geq 1$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Comme $\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$, d'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2),$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 =& \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + \sum_{k=1}^{n} k \\
=& \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1) \\
=& \frac{1}{4}n(n+1)\Big((n-1)(n+2)+2\Big) = \frac{1}{4}n(n+1)\Big(n^2+n-2+2\Big) \\
=& \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2.
\end{aligned}$$

**Exercice 2** **Application**

On considère l'application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ par $f(m,n) = (2m+n, 3m+2n)$.

1. Montrer que $f$ est injective.

   Soient $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $f(m_1, n_1) = f(m_2, n_2)$. Par définition, cette dernière est équivalent au système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2m_1 + n_1 = 2m_2 + n_2, \\ 3m_1 + 2n_2 = 3m_2 + 2n_2. \end{cases} \xRightarrow{L_1 \to 2L_1 - L_2} \begin{cases} m_1 = m_2, \\ 3m_1 + 2n_2 = 3m_2 + 2n_2. \end{cases}$$
$$\xRightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \quad m_1 = m_2 \ \& \ n_1 = n_2.$$

   Donc, l'application $f$ est injective.

2. L'application $f$ est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

   Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. On cherche $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $f(m,n) = (p,q)$. Par définition, cette dernière est équivalent au système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2m + n = p, \\ 3m + 2n = q. \end{cases} \xRightarrow{L_1 \to 2L_1 - L_2} \begin{cases} m = 2p - q, \\ 3m + 2n = q. \end{cases}$$
$$\xRightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \quad m = 2p - q \ \& \ n = -3p + 2q.$$

   Cette solution montre que $\exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $f(m,n) = (p,q)$, i.e., $f$ est surjective. D'après la question précédente, on en déduit que l'application $f$ est bijective.

**Exercice 3** **Images directes et réciproques.**

1. Déterminer $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$, avec $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(x)$.

   Comme $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$, $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. On en déduit que $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = \left[0, \frac{\pi}{3}\right[ \cup \left]\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$

2. Soit $f : [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$. L'application $f$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

   Par définition, on a $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi]$. Puisque $f([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[) = [1, +\infty[$ et $f(]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi]) = ]-\infty, 1]$, on a

$$f\left([\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}\right) = f\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi\right]\right) = f\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \cup f\left(\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi\right]\right) = [1, +\infty[\cup] - \infty, 1] = \mathbb{R},$$

   d'où $f$ est surjective. L'application $f$ n'est pas injective car $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1$. En particulier, $f$ n'est pas bijective.

3. Montrer que l'application $g : ]1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(x))$ est bijective.

   La fonction $\ln : ]0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$ étant bijective et crroissante, sa restriction sur $]1, +\infty[$ donne une bijection entre $]1, +\infty[$ et $]0, +\infty[$ car $\ln(1) = 0$, d'où l'application $g$ est bijective comme c'est la composée des applications bijectives.

**Exercice 4** **Assertions mathématiques et quantificateurs.**

Soit $f : E \to F$ une application. On considère les assertions mathématiques $(P)$ et $(Q)$ suivantes :

$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$
$$(Q) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y\,.$$

1. Ecrire les négations non$(P)$ et non$(Q)$.

$$\begin{aligned} \text{non}(P): &\quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) \neq y \\ \text{non}(Q): &\quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \neq y\,. \end{aligned}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions $(P)$ ou $(Q)$ est-elle vraie ? Justifier.
   L'assertion $(P)$ n'est pas vraie car, e.g., $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$, i.e., $f$ n'est pas constante. Par contre l'assertion $(Q)$ est vraie car pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{y}) = y$, donc $f$ est surjective.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.
   Ni l'assertion $(P)$ ni l'assertion $(Q)$ n'est vraie. Comme $f(0) = 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, d'où la fonction $f$ n'est pas une constante. Comme $|\sin x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par exemple, $f^{-1}(2) = \emptyset$.