Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2024–2025**

L1 — UE : Algèbre 1 (INFO)

Devoir Surveillé 1 - 24 octobre 2024

Durée : 1h

CORRECTION

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 **Calculs de sommes (5 points = 2.5 + 2.5).**

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\dfrac{2}{k^2-1} = \dfrac{a}{k-1} - \dfrac{b}{k+1}$ et en déduire, pour tout entier $N \geq 2$, la valeur de la somme

$$S_N = \sum_{k=2}^{N} \left(6k + \frac{2}{k^2-1}\right).$$

Correction. Soient a et b deux réels, alors pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a

$$\frac{2}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} - \frac{b}{k+1} \iff \frac{2}{k^2-1} = \frac{a(k+1)-b(k-1)}{(k-1)(k+1)} \iff \frac{2}{k^2-1} = \frac{(a-b)k+a+b}{k^2-1}$$

et donc, par identification, on trouve que $a-b=0$ et $a+b=2$ c'est-à-dire que $(a,b)=(1,1)$. On a donc, pour tout $N \geq 2$ entier,

$$\begin{aligned}
S_N = \sum_{k=2}^{N} \left(6k + \frac{2}{k^2-1}\right) &= 6\sum_{k=2}^{N} k + \sum_{k=2}^{N} \frac{2}{k^2-1} \\
&= 6\left(\frac{N(N+1)}{2} - 1\right) + \sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= 3N(N+1) - 6 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k+1} \\
&= 3N(N+1) - 6 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j} - \sum_{i=3}^{N+1} \frac{1}{i} \\
&= 3N(N+1) - 6 + 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=3}^{N-1} \frac{1}{j} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} - \sum_{i=3}^{N-1} \frac{1}{i} \\
&= 3N(N+1) - 6 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} \\
&= 3N^2 + 3N - \frac{9}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}.
\end{aligned}$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Initialisation : si $n = 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1, \quad \text{et} \quad \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1,$$

donc P_1 est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_n vraie et montrons qu'alors P_{n+1} est vraie. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},
\end{aligned}$$

et donc P_{n+1} est vraie.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie par récurrence.

<u>Exercice 2</u> Injectivité, surjectivité, bijectivité (6 points = 2 + 2 + 2).

Les applications suivantes sont elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifier votre réponse.

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2 + 1$,

   Correction. f n'est pas surjective car $-1 \in \mathbb{Z}$ n'a pas d'antécédent par f. De plus, f n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 2$ et $\{1, -1\} \subset \mathbb{Z}$. Ainsi, f n'est pas bijective.

2. $g : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $x \mapsto \frac{x-3}{x+1}$,

   Correction. Montrons que g est bijective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, alors on a

   $$\begin{aligned}
   y = g(x) \iff y = \frac{x-3}{x+1} &\iff y(x+1) = x - 3 \\
   &\iff yx + y = x - 3 \\
   &\iff x(y-1) = -y - 3 \\
   &\iff x = \frac{-y-3}{y-1} \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}.
   \end{aligned}$$

   Ainsi, y admet un unique antécédent par g dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et donc g est bijective.

3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x|x|$.

   Correction. On remarque que $h(x) = x^2$ si $x \geq 0$ et $h(x) = -x^2$ si $x < 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors :

   - si $y \geq 0$, on a $y = h(x) \iff y = x|x| \iff y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$,
   - si $y < 0$, on a $y = h(x) \iff y = x|x| \iff y = -x^2 \iff -y = x^2 \iff x = -\sqrt{-y}$.

   Dans les deux cas, y admet un unique antécédent par h dans $\mathbb{R}$, donc h est bijective.

Exercice 3 **Ensembles (3 points).**

Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

Montrer que $B = C$.

Correction. Montrons tout d'abord que $B \subset C$. Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$, donc $x \in A \cup C$, puisque $A \cup B = A \cup C$. On a alors deux cas :

- Si $x \in C$, on a bien montré que $B \subset C$.
- Sinon, si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in A \cap C$, car $A \cap B = A \cap C$, et donc $x \in C$ ce qui prouve aussi que $B \subset C$.

Pour montrer que $C \subset B$, il suffit d'intervertir B et C dans le raisonnement précédent.

Exercice 4 **Images directes et réciproques (6 points = 1 + 2.5 + 2.5).**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. De plus, on définit $A = [-3, 1]$, $B =]-1, 2]$, $C = [-2, 9[$ et $D =]4, 16[$.

1. Déterminer $A \cap B$ et $C \cup D$.

   Correction. On a $A \cap B =]-1, 1]$ et $C \cup D = [-2, 16[$.

2. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ mais que $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

   Correction. On a

$$f(A \cap B) = f(]-1, 1]) = [0, 1], \quad f(A) = f([-3, 1]) = [0, 9], \quad f(B) = f(]-1, 2]) = [0, 4],$$

   et ainsi,

$$f(A \cap B) = [0, 1] \subset f(A) \cap f(B) = [0, 4], \quad f(A) \cap f(B) = [0, 4] \not\subset [0, 1] = f(A \cap B).$$

3. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

   Correction. On a

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}([-2, 16[) =]-4, 4[$$

   et

$$f^{-1}(C) = f^{-1}([-2, 9[) =]-3, 3[, \quad f^{-1}(D) = f^{-1}(]4, 16[) =]-4, -2[\cup]2, 4[,$$

   donc on a bien

$$f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) =]-3, 3[\cup (]-4, -2[\cup]2, 4[) =]-4, 4[= f^{-1}(C \cup D).$$

Exercice 5 **BONUS (2 points = 1 + 1).**

Écrire les phrases suivantes avec les quantificateurs :

1. Il existe une application bijective entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

   Correction. $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \exists! x \in \mathbb{N}, y = f(x)$.

2. Il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

   Correction. $\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(\mathbb{N}) \neq \mathbb{R}$.