
Exercice

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Somme

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n (k-1)k(k+1) = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2).$$

2. En déduire la valeur, pour tout entier $n \geq 1$, de $\sum_{k=1}^n k^3$.

Exercice 2 Application

On considère l'application $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ définie pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ par $f(m, n) = (2m + n, 3m + 2n)$.

- Montrer que f est injective.
- L'application f est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 Images directes et réciproques.

- Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$, avec $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(x)$.
- Soit $f : [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$. L'application f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
- Montrer que l'application $g :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(x))$ est bijective.

Exercice 4 Assertions mathématiques et quantificateurs.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$

$$(Q) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

- Ecrire les négations $\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.
- Même question avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.