

Devoir Surveillé 1 - 24 octobre 2024

Durée : 1h

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Calculs de sommes (5 points = 2.5 + 2.5).

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{2}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} - \frac{b}{k + 1}$ et en déduire, pour tout entier $N \geq 2$, la valeur de la somme

$$S_N = \sum_{k=2}^N \left(6k + \frac{2}{k^2 - 1} \right).$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 2 Injectivité, surjectivité, bijectivité (6 points = 2 + 2 + 2).

Les applications suivantes sont elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifier votre réponse.

1. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2 + 1,$
2. $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto \frac{x - 3}{x + 1},$
3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x|x|.$

Exercice 3 Ensembles (3 points).

Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

Montrer que $B = C$.

Exercice 4 Images directes et réciproques (6 points = 1 + 2.5 + 2.5).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. De plus, on définit $A = [-3, 1]$, $B =]-1, 2]$, $C = [-2, 9[$ et $D =]4, 16[$.

1. Déterminer $A \cap B$ et $C \cup D$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ mais que $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.
3. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Exercice 5 BONUS (2 points = 1 + 1).

Écrire les phrases suivantes avec les quantificateurs :

1. Il existe une application bijective entre \mathbb{N} et \mathbb{Q} .
2. Il n'existe pas d'application surjective de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .