Résumé de CM1

Nombres rationnels

Un **nombre raionnel** est un nombre qui s'écrit sous forme de $\frac{a}{b}$ avec deux entiers relatifs a et $b \neq 0$. On décrète que

$$\text{les deux fractions } \frac{a}{b} \text{ et } \frac{a'}{b'} \text{ sont égaux si et seulement si } ab' = a'b.$$

Voyons ce que signifie cette définition. Une propriété tout simple est que, $\forall\, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire, on peut ≪ simplifier ≫. (Cette égalité est claire car $(am)b = a(mb) = a(bm)$.)

Pour deux fraction $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on définit la somme $+$ par la formule suivante :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}. \tag{1}$$

($A{:=}B$ signifie ≪ A est défini par B ≫.) C'est formule est ≪ naturelle ≫ d'un sens, car

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Est-ce que c'est une bonne définition ?, i.e.(= *id est* = c'est-à-dire), on peut se poser une question (très importante) suivante: comme ily a plusieurs expressions pour un nombre rationel, on se demande si le deuxième membre de (1) ne dépend pas de choix d'expressions. Vérifions si, pour $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a toujours

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'},$$

plus précisément,

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}.$$

Pour cela, il nous suffit de voir si l'égalité suivante est vraie:

$$(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd.$$

Par hypothèse $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a

$$ab' = a'b \qquad \text{et} \qquad cd' = c'd.$$

Puisque

$$\begin{aligned}(ad+bc)b'd' - (a'd'+b'c')bd =&(ad)(b'd') + (bc)(b'd') - (a'd')(bd) - (b'c')(bd)\\ =&(ad)(b'd') - (a'd')(bd) + (bc)(b'd') - (b'c')(bd)\\ =&(ab'-a'b)dd' + bb'(cd'-c'd) = 0,\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}.$$

Donc, la somme (1) ne dépend pas de choix des expressions de deux nombres rationels. En jargon mathématique, on dit que la somme (1) est **bien-définie**.

Ensuite, Pour deux nombres rationels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on définit le produit $\times$ par la formule suivante:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}. \tag{2}$$

De même (que la somme $+$), on pourra montrer que le produit (2) est aussi **bien-défini**, i.e., pour $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a toujours

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'} \qquad \text{plus précisément,} \qquad \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}.$$

Il suffit de vérifier si on a

$$(ac)(b'd') = (a'c')(bd).$$

En effet, comme

$$(ac)(b'd') - (a'c')(bd) = (ab')(cd') - (a'b)(c'd) = (ab' - a'b)(cd') + (a'b)(cd' - c'd) = 0,$$

on en déduit que le produit (2) est bien-défini.

On peut montrer que ces deux opérations vérifient les axiomes suivants :

1. (**Associativité**) $\quad (x+y)+z = x+(y+z)$,
2. (l'**élément neutre**) $\quad x+0 = 0+x = x$,
3. (la **symétrie** ou l'**opposé**) $\quad$ pour tout x, il existe (un unique) $x' \in \mathbb{Z}$ tel que $x+x' = x'+x = 0$. Notons cet élément x' par $-x$.
4. (**Commutativité**) $\quad x+y = y+x$,

et la multiplication $\times$ vérifie

5. (**Associativité**) $\quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$,
6. (l'**élément neutre**) $\quad x \times 1 = 1 \times x = x$,
7. (**Commutativité**) $\quad x \times y = y \times x$.

De plus, ces deux opérations vérifient

8. (**Distributivité**) $\quad (x+y) \times z = x \times z + y \times z, \quad x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

Quelques symboles

$$\mathbb{N} := \{0,1,2,\dots\} : \text{ l'ensemble des entiers naturels,}$$
$$\mathbb{Z} := \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} : \text{ l'ensemble des entiers relatifs,}$$
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\} : \text{ l'ensemble des nombres rationels.}$$

$\boxed{\textbf{Exponentielle}}$

Soient a un nombre réel non nul, m un entier strictement positif. Posons

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m}.$$

Pour deux entiers strictement positifs m et n, on a

$$\begin{aligned}
a^m \times a^n &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} \\
&= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n} = a^{m+n}, \\
(a^m)^n &= \underbrace{(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m}) \times \cdots\cdots \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m})}_{n} \\
&= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{mn} = a^{mn},
\end{aligned}$$

i.e.($=$ *id est* $=$ c'est-à-dire),

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}. \tag{3}$$

Posons

$$a^0 = 1.$$

On peut vérifier que les formules (3) sont valables même pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Définissons a^{-m} pour $m \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

on pourra vérifier que les formules (3) sont aussi valables pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.

Notons que, pour deux nombres réels a et b non null et un nombre entier relatif m, on a aussi

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m. \tag{4}$$

<u>Question: jusqu'où peut-on étendre les formules (3) et (4)?</u>

Soient $a \neq 0$ un nombre réel, m un entier relatif et n un entier strictement positif. Comment peut-on définir $a^{\frac{m}{n}}$? Ici, on suppose que $a > 0$. Sous cette condition, on pourra poser

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Alors, on pourra montrer que, pour tous deux nombres réels a et b strictement positifs et pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x \cdot b^x.$$