Résumé de CM12

Fractions rationnelles Ici, on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ etc.

Ici, pour définir le corps $\mathbb{K}(X)$ des **fractions rationnelles** à partir de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$, nous allons procéder de la même manière que la construction du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs (cf. le résumé de CM1).

Une **fraction rationnelle** est une expression (ou formule) qui s'écrit sous forme de $\dfrac{P}{Q}$ avec deux polynômes P et $Q \neq 0$. On décrète que

les deux fractions rationnelles $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{P'}{Q'}$ sont égaux si et seulement si $PQ' = P'Q$.

Voyons ce que signifie cette définition. Une propriété tout simple est que, $\forall\, S(X) \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$,

$$\frac{PS}{QS} = \frac{P}{Q},$$

c'est-à-dire, on peut « simplifier ». (Cette égalité est claire car $(PS)Q = P(SQ) = P(QS)$.)

Maintenant, nous allons `définir` deux opérations: l'**addition** $+$ et la **multiplication**(= le produit) $\times$ ou $\bullet$.

Pour deux fraction $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{S}{T}$, on définit la somme $+$ par la formule suivante:

$$\frac{P}{Q} + \frac{S}{T} := \frac{PT + QS}{QT}. \tag{1}$$

C'est formule est « naturelle » d'un sens, car

$$\frac{P}{Q} + \frac{S}{T} = \frac{PT}{QT} + \frac{QS}{QT} = \frac{PT + QS}{QT}.$$

Est-ce que c'est bien définie ?, i.e., on peut se poser une question (très importante) suivante: comme ily a plusieurs expressions pour une fraction, on se demande si le deuxième membre de (1) ne dépend pas de choix d'expressions. Vérifions si, pour $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\dfrac{S_1}{T_1} = \dfrac{S_2}{T_2}$, on a toujours

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{S_1}{T_1} = \frac{P_2}{Q_2} + \frac{S_2}{T_2},$$

plus précisément,

$$\frac{P_1T_1 + Q_1S_1}{Q_1T_1} = \frac{P_2T_2 + Q_2S_2}{Q_2T_2}.$$

Pour cela, il nous suffit de voir si l'égalité suivante est vraie:

$$(P_1T_1 + Q_1S_1)Q_2T_2 = (P_2T_2 + Q_2S_2)Q_1T_1.$$

Par hypothèse $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\dfrac{S_1}{T_1} = \dfrac{S_2}{T_2}$, on a

$$P_1Q_2 = P_2Q_1 \qquad \text{et} \qquad S_1T_2 = S_2T_1.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
&(P_1T_1 + Q_1S_1)Q_2T_2 - (P_2T_2 + Q_2S_2)Q_1T_1\\
=&(P_1T_1)(Q_2T_2) + (Q_1S_1)(Q_2T_2) - (P_2T_2)(Q_1S_1) - (Q_2S_2)(Q_1T_1)\\
=&(P_1T_1)(Q_2T_2) - (P_2T_2)(Q_1T_1) + (Q_1S_1)(Q_2T_2) - (Q_2S_2)(Q_1T_1)\\
=&(P_1Q_2 - P_2Q_1)T_1T_2 + Q_1Q_2(S_1T_2 - S_2T_1) = 0,
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\frac{P_1T_1 + Q_1S_1}{Q_1T_1} = \frac{P_2T_2 + Q_2S_2}{Q_2T_2} \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{P_1}{Q_1} + \frac{S_1}{T_1} = \frac{P_2}{Q_2} + \frac{S_2}{T_2}.$$

Donc, la somme (1) est **bien-définie**.

Ensuite, Pour deux fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{S}{T}$, on définit le produit $\cdot$ par la formule suivante:

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{T} := \frac{PS}{QT}. \tag{2}$$

De même (que la somme $+$), on pourra montrer que le produit (2) est aussi **bien-défini**, i.e., pour $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ et $\frac{S_1}{T_1} = \frac{S_2}{T_2}$, on a toujours

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{S_1}{T_1} = \frac{P_2}{Q_2} \cdot \frac{S_2}{T_2} \qquad \text{plus précisément,} \qquad \frac{P_1S_1}{Q_1T_1} = \frac{P_2S_2}{Q_2T_2}.$$

Il suffit de vérifier si on a

$$(P_1S_1)(Q_2T_2) = (P_2S_2)(Q_1T_1).$$

En effet, comme

$$\begin{aligned}
&(P_1S_1)(Q_2T_2) - (P_2S_2)(Q_1T_1) = (P_1Q_2)(S_1T_2) - (P_2Q_1)(S_2T_1)\\
=&(P_1Q_2 - P_2Q_1)(S_1T_2) + (P_2Q_1)(S_1T_2 - S_2T_1) = 0,
\end{aligned}$$

on en déduit que le produit (2) est bien-défini.

Enfin, on vient de voir que deux opérations $+$ et $\cdot$ sont définies sur l'ensemble des fractions rationnelles, noté $\mathbb{K}(X)$. On pourra montrer que $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un corps commutatif.

Remarque Strictement dit, l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ est défini comme ensemble quotient.

Sur l'ensemble $(\mathbb{K}[X]\backslash\{0\}) \times \mathbb{K}[X]$, on définit une relation $\sim$ comme suit: pour deux éléments (Q_1, P_1) et (Q_2, P_2) de $(\mathbb{K}[X]\backslash\{0\}) \times \mathbb{K}[X]$,

$$(Q_1, P_1) \sim (Q_2, P_2) \quad \Longleftrightarrow \quad P_1Q_2 = P_2Q_1.$$

On peut montrer que c'est une relation d'équivalence. Alors, l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ est l'ensemble quotient $\big((\mathbb{K}[X]\backslash\{0\}) \times \mathbb{K}[X]\big)/\sim$, et que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ n'est que la classe d'équivalence du paire (Q, P), i.e., $\mathrm{Cl}_\sim((Q, P))$. $\square$

Cette remarque vous aidera à comprendre ce que c'est « **ensemble quotient** », qui a l'aire très abstrait, et ce que ça vaut dire **décréter**.

Éléments simples $\mathbb{K}$: un corps commutatif, e.g., $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ etc.

L'objectif ici est de trouver la « forme normale » des fractions rationnelles, qui est une étape importante pour calculer les primitives de la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$.

Lorsque Q est un constant, la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ n'est qu'un polynôme, d'où on suppose que Q est un polynôme non constant.

1ère étape. Supposons que $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$. Alors, par la division euclidienne de P par Q, il existe un unique pair $(A, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = AQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$. On a

$$\frac{P}{Q} = \frac{AQ + R}{Q} = \frac{AQ}{Q} + \frac{R}{Q} = A + \frac{R}{Q}.$$

Donc, on peut supposer que $\deg(P) < \deg(Q)$ sans perte de généralité.

2ème étape. Il existe polynômes irréductibles $Q_1, Q_2, \cdots Q_r$ non constants deux à deux premiers entre eux et des entiers $m_1, m_2, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $Q = Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_r^{m_r}$. Comme les polynômes $Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}$ et $Q_r^{m_r}$ sont premiers entre eux, par identité de Bézout, il existe un pair $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A \cdot (Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}) + B \cdot Q_r^{m_r} = 1$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q} &= \frac{P \cdot 1}{(Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}) Q_r^{m_r}} = \frac{P(A \cdot (Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}) + B \cdot Q_r^{m_r})}{(Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}) Q_r^{m_r}} \\ &= \frac{PA}{Q_r^{m_r}} + \frac{PB}{Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}}.\end{aligned}$$

Par récurrence, on voit que toute fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ s'écrit comme la somme d'un polynôme et de fractions rationnelles de la forme $\dfrac{P}{Q^m}$ où Q est un polynôme irréductible. D'ici, on va traiter des fractions rationnelles de la forme $\dfrac{P}{Q^m}$ avec un polynôme Q non constant et irréductible et $m \in \mathbb{N}^*$.

3ème étape. Si le $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$[1], par la division euclidienne de P par Q, il existe un unique pair $(A, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = AQ + R$ et $\deg(R) > \deg(Q)$. On a

$$\frac{P}{Q^m} = \frac{AQ + R}{Q^m} = \frac{A}{Q^{m-1}} + \frac{R}{Q^m}.$$

Tant que le degré du quotient A est supérieur ou égale au $\deg(Q)$, on répète la même procédure... On voit que toute fraction rationnelle s'écrit comme la somme de fractions rationnelles de la forme $\dfrac{P}{Q^m}$ où $\deg(P) < \deg(Q)$, le polynôme Q est non constant et irréductible et $m \in \mathbb{N}^*$.

[1] Jusqu'ici, on suppose que le degré du polynôme P est inférieur au degré du dénominateur Q^m qui est égale à $m \deg(Q)$.

Définition Un élément de $\mathbb{K}[X]$, une fraction rationnelle de la form $\dfrac{P}{Q^m}$ où P est un polynôme, Q est un polynôme non constant et irréductible, $\deg(P) < \deg(Q)$ et $m \in \mathbb{N}^*$ sont appelés **éléments simples**. $\square$

En résumé, on obtient le théorème suivant:

Theorème Toute élément de $\mathbb{K}(X)$ peut s'écrire comme la somme d'éléments simples. $\square$

Exemples Voici les éléments simples qui ne sont pas un polynômes:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On sait qu'un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré 1, d'où un élément simple qui n'est pas un polynôme est une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{C}{(X-\alpha)^m} \qquad C \in \mathbb{C}^*,\ \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } m \in \mathbb{N}^*.$$

2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dans ce cas, le degré d'un polynôme irréductible est 1 ou 2. Donc un élément simple qui n'est pas un polynôme est une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{C}{(X-\alpha)^m} \qquad C \in \mathbb{R}^*,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } m \in \mathbb{N}^*,$$

ou

$$\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^m} \qquad aX+b \in \mathbb{R}[X]\backslash\{0\},\ p,q \in \mathbb{R} \text{ tel que } p^2-4q<0 \text{ et } m \in \mathbb{N}^*.$$

Notons que la condition $p^2 - 4q < 0$ est nécessaire pour que le polynôme $X^2 + pX + q$ soit irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. $\square$

Questions pratiques

Étant donné une fraction rationnelle, disons $\dfrac{P}{Q}$, comment peut-on la décomposer en éléments simples ? Bien évidemment, par la division euclidienne (la **première étape** ci-dessus) si nécessaire, on peut supposer que $\deg(P) < \deg(Q)$ sans perte de généralité.

Revenons à la factorisation

$$Q = Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}} Q_r^{m_r}.$$

D'après les **deuxième** et **troisième** étapes ci-dessus, les éléments simples apparus dans la décomposition de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ doivent être

$$\frac{P_i}{Q_i^{k_i}}$$

où $1 \leqslant i \leqslant r$ et $0 < k_i \leqslant m_i$ sont des entiers et P_i sont polynômes de degré $< \deg(Q_i)$.