Résumé de CM2

Les notations Σ et Π avec quelques propriétés de base

Soient $0 \leq m \leq n$ des entiers naturels, et soient $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ des nombres réels. On définit la *somme des a_k pour k variant de m à n* par

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

On pourra aussi écrire cette somme par

$$\sum_{m \leq k \leq n} a_k.$$

Soient $b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n$ des nombres réels, et soir $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Ces deux propriétés s'appellent la **linéarité** de $\sum_{k=m}^{n}$. De même, le *produit des a_k pour k variant de m à n* est défini par

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

On pourra aussi écrire cette somme par

$$\prod_{m \leq k \leq n} a_k.$$

On a

$$\prod_{k=m}^{n} (a_k b_k) = \Big(\prod_{k=m}^{n} a_k\Big)\Big(\prod_{k=m}^{n} b_k\Big), \qquad \prod_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Voici quelques formules à retenir:

1. (suite arithmétique) Soient $a, d \in \mathbb{R}$ tels que $a_k = a + (k-1)d$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2} n(2a + (n-1)d).$$

2. (suite géométrique) Soient $a, r \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tels que $r \neq 1$ et $a_k = ar^{k-1}$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

<u>Preuve</u>. Montrons 1. Posons $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Comme

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 = \sum_{l=1}^{n} a_{n+1-l},$$

(on a fait le changement d'indice k par $n+1-l$), on a

$$2S = S + S = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{n+1-k}).$$

Puisque

$$\begin{aligned} a_k + a_{n+1-k} =& (a + (k-1)d) + (a + (n-k)d) \\ =& 2a + ((k-1) + (n-k))\, d = 2a + (n-1)d, \end{aligned}$$

(cette dernière est *indépendant* de k !), on en déduit que

$$2S = \sum_{k=1}^{n} (2a + (n-1)d) = n(2a + (n-1)d), \quad \text{i.e.,} \quad S = \frac{1}{2} n(2a + (n-1)d).$$

Montrons 2. Posons $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors, on a

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}, \\ rS &= \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n. \end{aligned}$$

Calculons la différence, on en déduit que

$$(1-r)S = a - ar^n = a(1-r^n), \qquad \text{i.e.,} \qquad S = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}.$$

$\square$

La troisième formule, un peu générale, est **sommes téléscopiques**: c'est la somme de forme

3. $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1})$ avec deux entiers $m \leq n$. On a

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}.$$

En effet, on a

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \underbrace{(a_m - a_{m-1})}_{k=m} + \underbrace{(a_{m+1} - a_m)}_{k=m+1} + \cdots + \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{k=n} = a_n - a_{m-1}.$$

Exemple. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme

$$\begin{aligned} & k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)(k+m) - (k-1)k(k+1)\cdots(k+m-1) \\ =& (m+1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{1}{m+1} \cdot n(n+1)\cdots(n+m).$$

Voyons un cas particulier $m = 2$. D'après cette formule, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

La formule pour la suite arithmétique ($a = d = 1$) implique que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 =& \sum_{k=1}^{n}(k(k+1)-k) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k \\ =& \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)\left(2(n+2)-3\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Cette formule est à retenir. De même, on peut montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2.$$

Un exemple pour le produit est, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!.$$

Plus généralement, pour entiers $0 < m \leq n$, on a

$$\prod_{k=m}^{n} k = m \times (m+1) \times \cdots \times n = \frac{1 \times \cdots \times (m-1) \times m \times (m+1) \times \cdots \times n}{1 \times \cdots \times (m-1)} = \frac{n!}{(m-1)!}.$$