Résumé de CM4

Opérations sur ensembles

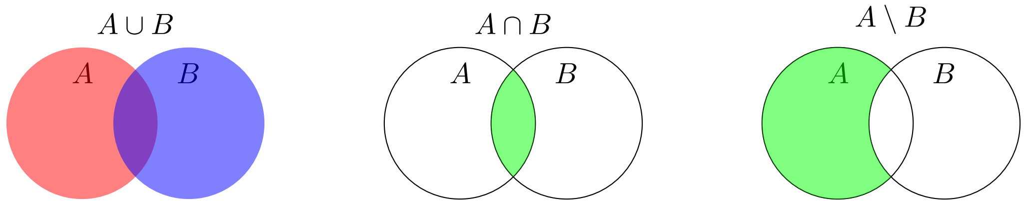
Soient A et B deux ensembles.

1. La **réunion** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par
$$\{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

2. L'**intersection** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par
$$\{x \mid x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$

3. La **différence** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \setminus B$, défini par
$$\{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Voici les diagrammes de Venn de la réunion $A \cup B$, l'intersection $A \cap B$ et la différence $A \setminus B$:



Voici quelques propriétés importantes:

1. Soient A, B, C et D ensembles.
   i) Si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors on a $A \cup B \subset C$, et
   ii) si $D \subset A$ et $D \subset B$, alors on a $D \subset A \cap B$.

2. Soient A, B et C ensembles.
   i) (Associativité)
   $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$
   ii) (Distributivité)
   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

3. Soit E un semble et soient A et B deux parties de E. Alors, on a
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = (A^c \cup B^c).$$

Applications

Une **application** est la donnée de deux ensembles E et F et de flèche $f : E \to F$ qui associe à chaque élément de E un (unique) élément de F. Lorsque un élément x de E est associé à un élément, disons y, de F, on la note $y = f(x)$. On dit que y est l'**image** de x et x est un **antécédent** de y.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. L'application f est dite **injective** lorsque, pour deux éléments x et y de E, $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$.
2. L'application f est dite **surjective** lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent.
3. L'application f est dite **bijective** lorsque elle est injective et surjective en même temps.

Remarque. Avec les quantificateurs, on pourra écrire ces définitions comme suit:

1. f: injective $\overset{\text{déf.}}{\iff}$ $\forall\, x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y.$
2. f: surjective $\overset{\text{déf.}}{\iff}$ $\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E\ f(x) = y.$
3. f: bijective $\overset{\text{déf.}}{\iff}$ $\forall\, y \in F,\ \exists!\, x \in E\ f(x) = y.$

Soient E, F et G ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux application. Alors, on peut définir l'application de E dans G appelée la **composée** de f et g, notée $g \circ f$, définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad x \in E.$$

Voici quelques propriétés: soient E et F deux ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to F$ deux applications.

1. Lorsque $g \circ f$ est injective, f est injective.
   Preuve. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Par définition, on a
   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y).$$
   L'application $g \circ f$ étant injective, on en déduit que $x = y$, d'où f est injective.
2. Lorsque $g \circ f$ est surjective, g est surjective.
   Preuve. Soit y un élément de G. L'application $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, d'où $f(x) \in F$ est un antécédent de y par g, i.e., g est surjective.

En particulier,

3. lorsque $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, où $\mathrm{Id}_E : E \to E; x \mapsto x$ est l'**application identité**, f est injective et g est surjective. Donc,
4. lorsque $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, les applications f et g sont bijectives.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Pour une partie $A \subset E$, la partie de F définie par $\{\, f(x) \,|\, x \in A \,\}$ s'appelle l'**image directe** de A, notée $f(A)$.

2. Pour une partie $B \subset F$, la partie de E définie par $\{\, x \,|\, f(x) \in B \,\}$ s'appelle l'**image réciproque**, notée $f^{-1}(B)$.

$\square$

Voici quelques propriétés: soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Soient A_1 et A_2 deux parties de E.
   i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
   ii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
   iii) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

2. Soient B_1 et B_2 deux parties de F.
   i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
   ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
   iii) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

3. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \qquad B \supset f(f^{-1}(B)).$$

Une preuve de ces énoncés est un bon exercice à travailler !

Exemples d'applications bijectives

Voici deux applications bijectives amusantes (à travaiiler) !

1^{er} exemple: Une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}; \qquad n \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}n & n : \text{pair}, \\ -\frac{n+1}{2} & n : \text{impair}. \end{cases}$$

Avant commencer à montrer sa bijectivité, essayons de voir comment cette fonction se comporte:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$f(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	$\cdots$

On constate que $f(\mathbb{N}_{pair}) = \mathbb{N}$ et $f(\mathbb{N}_{impair}) = -\mathbb{N}^*$, où

$$\mathbb{N}_{pair} = \{n \in \mathbb{N},\ n : \text{pair}\} \qquad \mathbb{N}_{impair} = \{n \in \mathbb{N},\ n ; \text{impair}\}.$$

Montrons la surjectivité de f. Soit $n \in \mathbb{Z}$. (Il suffit de montrer que $\exists\, m \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(m) = n$.)

1.) Le cas $n \geq 0$. Dans ce cas, il suffit de poser $m = 2n$. En effet, $m = 2n \in \mathbb{N}$ est pair d'où

$$f(m) = f(2n) = \frac{1}{2} \cdot 2n = n.$$

2.) Le cas $n < 0$. Dans ce cas, il suffit de poser $m = -2n - 1$. En effet, $-2n$ est un entier pair strictement positif, donc $m = -2n - 1 \in \mathbb{N}$ et c'est un entier impaire. Donc, par définition, on a

$$f(m) = f(-2n-1) = -\frac{(-2n-1)+1}{2} = -\frac{-2n}{2} = \frac{2n}{2} = n.$$

Dans les deux cas, nous avons trouvé $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(m) = n$, d'où l'application f est injective.

Ensuite, montrons l'injectivité de f. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $f(m) = f(n)$. (Il suffit de montrer que $m = n$.)

1.) Le cas $f(m) = f(n) \geq 0$. Dans ce cas, m et n sont pairs, donc par définition, on a

$$\frac{1}{2}m = f(m) = f(n) = \frac{1}{2}n \qquad \Longrightarrow \qquad m = n.$$

2.) Le cas $f(m) = f(n) < 0$. Dans ce cas, m et n sont pairs, donc par définition, on a

$$-\frac{m+1}{2} = f(m) = f(n) = -\frac{n+1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad m = n.$$

Dans les deux cas, nous avons montré que $m = n$, d'où f est injective.

2$^{\text{ème}}$ exemple: Une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2; \qquad n \mapsto \left(\frac{1}{2}(m+1)(m+2) - n, n - 1 - \frac{1}{2}m(m+1)\right)$$

avec un entier positif m vérifiant $\frac{1}{2}m(m+1) < n \leq \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$. En effet, si on pose

$$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}; \qquad (m,n) \longmapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + n + 1,$$

on pourra montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^2}$, i.e., l'application g est la réciproque de f.