Résumé de CM6

Nombres complexes

On a traité brièvement les systèmes de nombres:

$$(\mathbb{N}, +, \times) \quad \longrightarrow \quad (\mathbb{Z}, +, \times) \quad \longrightarrow \quad (\mathbb{Q}, +, \times) \quad \longrightarrow \quad (\mathbb{R}, +, \times)$$

suivant le souhait de gagner une liberté de certains de ces opérations $+$ et $\times$ sauf le dernier, où on souhaite avoir une stabilité par rapport à la $\ll$ lim $\gg$.

L'étape suivante est non-triviale; on veut résoudre équations algébriques, en particulier, une équation de seconde degré $ax^2 + bx + c = 0$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Pour cela, créons $i = \sqrt{-1}$!

Considérons l'ensemble

$$\mathbb{C} := \{ \, a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \, \},$$

avec le symbol i qui vérifie $i^2 = -1$. On considère deux opérations; la somme $+$ et le produit $\times$ ou $\cdot$, définies par

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ces opérations vérifient les axiomes suivants:

1. Par rapport à la somme $+$:
   - i)$_+$ (Associativité) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
   - ii)$_+$ (Élément neutre) $z + 0 = 0 + z = z$ où $0 := 0 + 0i$.
   - iii)$_+$ (Symétrique) $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\exists\, z' \in \mathbb{C}$ tel que $z + z' = z' + z = 0$. Cet élément z' sera noté $-z$.
   - iv)$_+$ (Commutativité) $z + w = w + z$.
2. Par rapport au produit $\times$:
   - i)$_\times$ (Associativité) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
   - ii)$_\times$ (Élément neutre) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ où $1 := 1 + 0i$.
   - iii)$_\times$ (Symétrique) $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exists\, z' \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot z' = z' \cdot z = 1$. Cet élément z' sera noté z^{-1}.
   - iv)$_\times$ (Commutativité) $z \cdot w = w \cdot z$.
3. (Distributivité):

$$(z_1 + z_2) \cdot w = z_1 \cdot w + z_2 \cdot w, \qquad w \cdot (z_1 + z_2) = w \cdot z_1 + w \cdot z_2.$$

On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

Remarque. En 1843, le mathématicien irlandais W. Hamilton eut découvert un nombre, appelé **quaternion**. L'ensemble de tels nombres, noté $\mathbb{H}$ est un $\ll$ doublage $\gg$ de $\mathbb{C}$:

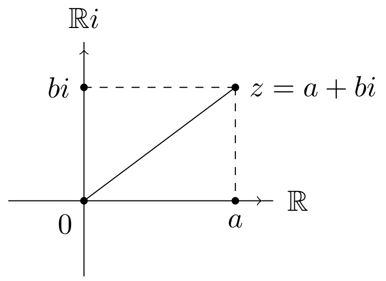
$$\mathbb{H} = \{ \, a + bi + cj + dk \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \, \}$$

avec les symbols i, j et k vérifiant

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

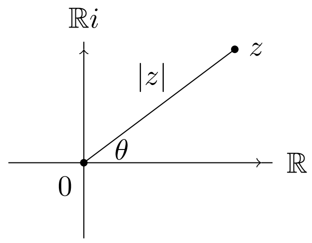
On pourra montrer que c'est un **corps non commutatif**. Un $\ll$ doublage $\gg$ de $\mathbb{H}$, appelé **octonion** ou **octave**, fut introduit par J. T. Graves et indépendamment par A. Cayley. Le produit sur l'ensemble de tels nombres $\mathbb{O}$ n'est plus associative ! $\square$

Via l'application bijective $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $z = a + bi \mapsto (a, b)$, on peut représenter des nombres complexes sur un plan $\mathbb{R}^2$ (plan complexe):



Les nombres réels a et b, notés Rez et Imz, sont appelés la **partie réelle** et la **partie imaginaire**, respectivement. Le nombre complexe $a - bi$ est dit le **conjugé** du nombre complexe z, noté par $\overline{z}$.

Pour le nombre complexe $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ est dit le **module** du nombre complexe z, noté par $|z|$, et l'angle θ dans le dessin ci-dessous s'appelle un **argument** du nombre complexe z, noté par $\arg(z) = \theta$.



__N.B.__ Plus précisément, tenant en compte de rotations, il faut dire que $\arg(z) \equiv \theta \mod 2\pi$. $\square$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Posons $r_k = |z_k|$ et $\theta_k = \arg(z_k)$ $(k = 1, 2)$. Alors, par définition, on a $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} z_1 z_2 =& r_1 r_2 \left((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2) \right) \\ =& r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned}$$

i.e., on a

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

En particulier, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Alors, le calcul ci-dessus montre que cette fonction vérifie l'égalité suivante:

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta).$$

Ça fait penser à une fonction exponentielle ? En effet, le mathématicien suisse L. Euler (1707 - 1783) a découvert la formule suivante, qui porte son nom :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Équation algébrique

Rappelons que notre point de départ pour une introduction de nombres complexes était de résoudre une équation algébrique de second degré $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ quelconque. En effet, les racines de cette équation sont $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, où $\Delta := b^2 - 4ac$ est le **discriminant** de cette équation. Lorsque $\Delta < 0$, il nous suffit de mentioner que $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-\Delta} \cdot i$! (Dans $\mathbb{C}$, on peut donc résoudre n'importe quelle équation de second degré avec les **coefficients réels**.)

Alors, que se passe-t-il sur une équation algébrique de second degré $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ avec les **coefficients complexes** ? Dans ce cas, le seul terme qu'il faut traiter en détail est, encore !, le discriminant Δ; cette-fois ci, Δ est un nombre complexe et il faut considérer les **racines carrées** d'un nombre complexe.

Racine carrée: Pour $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, calculons les racines carrées avec deux méthodes différentes.

1ère méthode. Notons $w = p + qi$ avec $p, q \in \mathbb{R}$. Soit $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ un nombre complexe vérifiant $w = z^2$. Or $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + (bi)^2 + 2abi = a^2 - b^2 + 2abi$, par identification, on a $a^2 - b^2 = p$ et $2ab = q$. De plus, comme $|w| = |z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$, On obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = p, \\ 2ab = q, \\ a^2 + b^2 = |w|. \end{cases}$$

Par la première et la troisième, on obtient

$$a^2 = \frac{|w|+p}{2} \quad \& \quad b^2 = \frac{|w|-p}{2}, \qquad \text{i.e.,} \qquad a = \pm\sqrt{\frac{|w|+p}{2}}, \quad \& \quad b = \pm\sqrt{\frac{|w|-p}{2}}.$$

Reste à utiliser la deuxième équation pour déterminer quelle combinaison des signe $\pm$ sont possible; on trouve les deux racines carrées de w ainsi.

2ème méthode. Travaillons avec la forme exponentielle: $w = Re^{i\theta}$ $(R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R})$. Cherchons $z = re^{i\varphi}$ $(r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R})$ vérifions $w = z^2$. Or $z^2 = r^2 e^{2\varphi i}$, on a

$$R = |w| = |z^2| = |z|^2 = r^2 \quad \text{i.e.,} \quad r^2 = R,$$

d'où $r = R^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}$. Ensuite, $w = z^2$ implique que $Re^{\theta i} = r^2 e^{2\varphi i} = Re^{2\varphi i}$, i.e., $e^{\theta i} = e^{2\varphi i}$. En tenant en compte du fait que la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, i.e., $e^{(\theta+2\pi)i} (= e^{\theta i} \cdot e^{2\pi i}) = e^{\theta i}$ d'après la formule d'Euler, l'égalité $e^{\theta i} = e^{2\varphi i}$ implique

$$2\varphi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{i.e.,} \qquad \varphi = \frac{1}{2}\theta + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Que signifie-t-il ? Par définition, $e^{\varphi i} = e^{\frac{1}{2}\theta i} \cdot e^{k\pi i}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Puisque $e^{k\pi i} = (e^{\pi})^k = (-1)^k$, on en déduit que les deux racines carrées du nombre complexe $w = Re^{i\theta}$ sont

$$\pm R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\theta i}.$$

Dans tous les cas, les racines carrées d'un nombres complexes sont nombres complexes. Par conséquence, les racines d'une équation algébrique de second degré sont encore nombres complexes.

Que peut-on dire pour une équation algébrique de degré > 2 ?

Traitons un cas simple: étant donné $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^n = w$ pour un $n > 1$. Ce problème est résoluble généralisant la deuxième méthode expliquée ci-dessus pour $n = 2$:

Racines n-ème: Travaillons avec la forme exponentielle: $w = Re^{i\theta}$ ($R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$). Cherchons $z = re^{i\varphi}$ ($r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$) vérifions $w = z^n$. Or $z^n = r^n e^{n\varphi i}$, on a

$$R = |w| = |z^n| = |z|^n = r^n \quad \text{i.e.,} \quad r^n = R,$$

d'où $r = R^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{R}$. Ensuite, $w = z^n$ implique que $Re^{\theta i} = r^n e^{n\varphi i} = Re^{n\varphi i}$, i.e., $e^{\theta i} = e^{n\varphi i}$. En tenant en compte du fait que la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, i.e., $e^{(\theta+2\pi)i} (= e^{\theta i} \cdot e^{2\pi i}) = e^{\theta i}$ d'après la formule d'Euler, l'égalité $e^{\theta i} = e^{n\varphi i}$ implique

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{i.e.,} \qquad \varphi = \frac{1}{n}\theta + \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Que signifie-t-il ? Par définition, $e^{\varphi i} = e^{\frac{1}{n}\theta i} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Étudions les valeurs de $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Tout d'abord, comme $(e^{\frac{2k\pi i}{n}})^n = e^{2k\pi i} = 1$, ces valeurs sont des n-ème racines d'unité ! De plus, puisque

$$e^{\frac{2(k+n)\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i + 2n\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{2n\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{2\pi i} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad \text{i.e.,} \qquad e^{\frac{2(k+n)\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

$k \mapsto e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ est n-périodique. Ceci implique l'égalité suivante

$$\{e^{\frac{2k\pi i}{n}}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{e^{\frac{2k\pi i}{n}}\}_{0 \le k < n}.$$

On en conclut que les racines n-ème de $w = Re^{\theta i}$ sont

$$z = R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}\theta i} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad 0 \le k < n.$$

Plus généralement, le théorème suivant est connu:

Théorème (D'Alembert-Gauss). Toute équation algébrique avec les coefficients complexes ont les racines dans $\mathbb{C}$. (On dit que le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.) $\square$

Une preuve simple de ce théorème nécessite Analyse complexe....

Ce théorème insiste que on peut toujours trouver les racines d'un polynôme avec les coefficients complexes dans $\mathbb{C}$, mais il ne dit rien comment les trouver.... Voici l'histoire:

1. En 1545, J. Cardano (1501 - 1576) a publié sa formule donnant les solution d'une équation algébrique de degré 3
2. En 1540, L. Ferrari (1522 - 1565) a trouvé une méthode permettant à résoudre une équation algébrique de degré 4.
3. En 1823, N. H. Abel (1802 - 1829) a montré qu'une équation algébrique de degré ≥ 5 n'est pas forcément résoluble, i.e., on ne peut pas forcément obtenir les solutions uniquement par des opérations algébrique, i.e., $\sqrt[n]{\cdot}, +, -, \times, \div$.
4. En 1828, Évariste Galois (1811 - 1832) lui a abordé le problème de détermination si une équation algébrique donnée est résoluble uniquement avec des opérations algébriques.

Pour les curieuse ou curieux,,, voici la résolution des équations de degré 3 et 4:

Équation cubique La méthode de Tartaglia-Cardan, découverte par Scipione del Ferro en 1515.

Ici, on travaille sur une équation algébrique de degré 3 de la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Tout d'abord, on pose $x = y - \frac{1}{3}a$. Alors,

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c \\ &= \left(y^3 + 3\left(-\frac{1}{3}a\right)y^2 + 3\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 y + \left(-\frac{1}{3}a\right)^3\right) \\ &\quad + a\left(y^2 + 2\left(-\frac{1}{3}a\right)y + \left(-\frac{1}{3}a\right)^2\right) + b\left(y + \left(-\frac{1}{3}a\right)\right) + c \\ &= y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3, \end{aligned}$$

d'où il nous suffit de travailler sur une équation de la forme

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2}$$

avec $p, q \in \mathbb{C}$. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $y = u + v$. Par définition, on a

$$y^3 + py + q = (u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Donc, si on trouve deux nombres complexes u et v vérifiant

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad \text{et} \qquad 3uv + p = 0, \tag{3}$$

on obtiendra les solution de l'équation algébrique (2). Comme (3) implique que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3v^3 = -\frac{1}{27}p^3, \end{cases}$$

les deux nombres u^3 et v^3 sont des racines du polynôme

$$(T-u^3)(T-v^3)=T^2-(u^3+v^3)T+u^3v^3=T^2+qT-\frac{1}{27}p^3,$$

d'où

$$u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2} \qquad \text{et} \qquad v^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2},$$

Posons $j=e^{\frac{2\pi i}{3}}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. On en déduit que les solutions de (3) sont

$$\begin{aligned}
&(u,v)\\
=&\left(\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}},\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}\right), \quad \left(j\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}},j^2\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}\right),\\
&\left(j^2\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}},j\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}\right),
\end{aligned}$$

sachant que $j^3=1$. À chaque pair ci-dessus, la somme $u+v$ nous donne une solution de (2), et les solutions de (2) sont ainsi obtenues.

Équation quartique La méthode découverte par Ludovico Ferrari (1522 - 1565).

L'équation en question est une équation algébrique de degré 4 de la forme

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{4}$$

avec $a,b,c,d\in\mathbb{C}$. Tout d'abord, on pose $x=y-\dfrac{1}{4}a$. Alors,

$$\begin{aligned}
x^4+ax^3+bx^2+cx+d=&\left(y-\frac{1}{4}a\right)^4+a\left(y-\frac{1}{4}a\right)^3+b\left(y-\frac{1}{4}a\right)^2+c\left(y-\frac{1}{4}a\right)+d\\
=&y^4+\left(b-\frac{3}{8}a^2\right)y^2+\left(c-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}a^3\right)y+\left(d-\frac{1}{4}ac+\frac{1}{16}a^2b-\frac{3}{256}a^4\right),
\end{aligned}$$

d'où il nous suffit de travailler sur une équation de la forme

$$y^4+py^2+qy+r=0. \tag{5}$$

Réécrivons cette équation sous la forme $y^4=-py^2-qy-r$, on ajoute à deux côtés $2zy^2+z^2$ ($z\in\mathbb{C}$):

$$y^4+2zy^2+z^2=(2z-p)y^2-qy+(z^2-r). \tag{6}$$

Choisissons le scalaire z pour que le côté droit soit un facteur carré, i.e., le discriminant du côté droit

$$\Delta:=(-q)^2-4(2z-p)(z^2-r)$$

soit nul. Notons que le scalaire z vérifie une équation cubique. Avec un tel z, on peut réécrire l'équation (6) comme

$$(y^2+z)^2 = (Ay+B)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y^2+z)^2-(Ay+B)^2 = (y^2+Ay+z+B)(y^2-Ay+z-B) = 0,$$

avec deux scalaire A et B. Reste à résoudre ces deux équations de second degré.