

**Exercices**

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

**Exercice 1** Soit  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de **Fibonacci**, i.e., une suite vérifiant

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

Montrer que le nombre  $F_n$  vérifie

$$F_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n-1-k}{k}.$$

**Exercice 2** Soit  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z + \frac{1}{z}$ .

1.  $f$  est-elle injective? Surjective? Bijective? Justifier vos réponses.
2. Trouver les  $w \in \mathbb{C}$  tels que le nombre d'éléments de  $f^{-1}(w)$  soit 1.

**Exercice 3**

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.
2. Trouver une solution particulière  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$  de l'équation  $720x + 252y = 108$ .
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne  $20x + 7y = 3$ .
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & (\text{mod } 20) \\ n \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

**Exercice 4** Soit  $P$  le polynôme réel :  $P = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$ . On suppose que 2 est une racine double de  $P$ .

1. Déterminer  $a$  et  $b$ .
2. Montrer que  $-1 + i$  est une racine de  $P$ .
3. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 5** Calculer le reste de la division euclidienne de  $123^{456}$  par 7.