Exercices

CORRECTION

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Soit $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de **Fibonacci**, i.e., une suite vérifiant

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

Montrer que le nombre F_n vérifie

$$F_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n-1-k}{k}. \tag{1}$$

Correction. Montrons la formujla (1) par récurrence.

Initialisation Pour $n = 0$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{-1-k}{k} = 0$ car $-1-k < 0$. Pour $n = 1$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{1-1-k}{k} = \binom{0}{0} = 1$.

Hérédité Supposons que la formule (1) est vraie rang n et $n+1$. En rang $n+2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n+2-1-k}{k} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n+1-k}{k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1}\right) && \text{(Identité de Pascal)}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n-k}{k} + \sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{n-(l+1)}{(l+1)-1} && \text{(changement de variable : } k = l+1.)\\
&= F_{n+1} + \sum_{l\in\mathbb{N}} \binom{n-l-1}{l} = F_{n+1} + F_n && \text{(Hypothèse de récurrence)}\\
&= F_{n+2}.
\end{aligned}$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la formule (1) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier vos réponses.
   Correction. Soit $w \in \mathbb{C}$ et considérons l'équation $f(z) = w$ sur z. Comme celle-ci est équivalent à l'équation $z^2 - wz + 1 = 0$, d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, elle possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$, d'où f est surjective. Le discriminant de l'équation $z^2 - wz + 1 = 0$ étant $w^2 - 4$, cette dernière admets deux solutions lorsque $w^2 - 4 \neq 0$, donc f n'est pas injective et f n'est pas bijective.
2. Trouver les $w \in \mathbb{C}$ tels que le nombre d'éléments de $f^{-1}(w)$ soit 1.
   Correction. Le discriminant de l'équation $z^2 - wz + 1 = 0$ étant $w^2 - 4$, l'ensemble de tels w sont
   $$\{\, w \in \mathbb{C} \mid w^2 - 4 = 0 \,\} = \{\pm 2\}.$$ s

Exercice 3

1. Calculer le PGCD de 720 et 252. **Correction.** D'après algorithme d'Euclide,

$$\begin{aligned}720 =& 2 \times 252 + 216\\ 252 =& 1 \times 216 + 36\\ 216 =& 6 \times 36,\end{aligned}$$

d'où le PGCD de 720 et 252 est 36.

2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $720x + 252y = 108$.
Correction. Calculons une identité de Bézout :

$$36 = 252-1\times216 = 252-1\times(720-2\times252) = (-1)\times720+3\times252 \quad\iff\quad 720\times(-1)+252\times3 = 36.$$

Multipliant cette identité par 3, on obtient $720 \times (-3) + 252 \times 9 = 108$, i.e., $(x_0, y_0) = (-3, 9)$ est une solution particulière de l'équation $720x + 252y = 108$.

3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$.
Correction. Divisant l'identité $720x_0+252y_0 = 108$ par 36, on obtient $20x_0+7y_0 = 3$. Soustrayant $20x_0 + 7y_0 = 3$ de l'équation $20x + 7y = 3$, on obtient $20(x - x_0) + 7(y - y_0) = 0$. Puisque 20 et 7 sont premiers entre eux, le Lemme de Gauss implique que 7 divise $x - x_0$, i.e., $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 7k$. Alors, $20(x - x_0) + 7(y - y_0) = 0$ implique $20 \cdot 7k + 7(y - y_0) = 0$, d'où $y - y_0 = -20k$. On en déduit que $(x, y) = (x_0 + 7k, y_0 - 20k)$. Et puis, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(x, y) = (x_0 + 7k, y_0 - 20k)$ est une solution de l'équation $20x + 7y = 3$ car

$$20(x_0 + 7k) + 7(y_0 - 20k) = 20x_0 + 20 \cdot 7k + 7y_0 - 7 \cdot 20k = (20x_0 + 7y_0) + 140k - 140k = 3.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$ est

$$\Big\{ (-3 + 7k, 9 - 20k),\ k \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & \pmod{20} \\ n \equiv 6 & \pmod{7} \end{cases}$$

Correction. La première équation implique que $\exists\, p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 20p + 9$ et que la deuxième implique que $\exists q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 7q + 6$, d'où

$$n = 20p + 9 = 7q + 6 \quad\iff\quad 20(-p) + 7q = 3.$$

D'après la question précédente, les solutions de cette dernière équation est $-p = -3 + 7k$ et $q = 9 - 20k$ ($\forall\, k \in \mathbb{Z}$), d'où

$$n = 20(3 - 7k) + 9\Big(= 7(9 - 20k) + 6\Big) = 69 - 140k \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

d'où les solutions du système d'équations en question sont les entiers n vérifiant $n \equiv 69 \mod 140$.
N.B. Après avoir trouvé l'équation $20(-p) + 7q = 3$, comme on sait que $(-p, q) = (-3, 9)$ i.e., $(p, q) = (3, 9)$ est une solution particulière de cette dernière équation, on trouve une solution particulière du système $n_0 = 20 \cdot 3 + 9 = 7 \cdot 9 + 6 = 69$. D'après le théorème de restes chinois, on eon conclu que les solutions du système en question sont les entiers n vérifiant $n \equiv n_0 \mod 20 \cdot 7$.

Exercice 4 Soit P le polynôme réel : $P = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$. On suppose que 2 est une racine double de P.

1. Déterminer a et b.

   Correction. Comme le polynôme P admet une racine double 2, on a $P(2) = P'(2) = 0$, d'où

   $$\begin{aligned} P(2) =& 64 - 16a - 48 + 4b + 32 + 8 = 0, \\ P'(2) =& 192 - 32a - 72 + 4b + 16 = 0. \end{aligned}$$

   Ces deux équations impliquent que $a = 5$ et $b = 6$.

2. Montrer que $-1 + i$ est une racine de P.

   Correction. La question précédente implique que

   $$\begin{aligned} P =& X^6 - 5X^4 - 6X^3 + 6X^2 + 16X + 8 = (X^2 - 4X + 4)(X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 6X + 2) \\ =& (X - 2)^2(X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 6X + 2). \end{aligned}$$

   Posons $Q = X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 6X + 2$. Il suffit de vérifier que $Q(-1 + i) = 0$ car celle-ci implique que $P(-1 + i) = \big((-1 + i) - 2\big)^2 Q(-1 + i) = 0$. Par définition, on a

   $$\begin{aligned} Q(-1 + i) =& (-1 + i)^4 + 4 \cdot (-1 + i)^3 + 7 \cdot (-1 + i)^2 + 6 \cdot (-1 + i) + 2 \\ =& (-4) + 4 \cdot (2 + 2i) + 7 \cdot (-2i) + 6 \cdot (-1 + i) + 2 \\ =& (-4 + 8 - 6 + 2) + (8 - 14 + 6)i = 0, \end{aligned}$$

   d'où $-1 + i$ est une racine du polynôme P.

3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

   Correction. La question précédente montre que $-1+i$ est une racine du polynôme Q. Puisque Q est un polynôme réel, ceci entraîne que $\overline{-1 + i} = -1 - i$ est aussi une racine du polynôme Q, donc le polynôme $(X - (-1 + i))(X - (-1 - i)) = X^2 + 2X + 2$ est un diviseur du polynôme Q. D'après la division euclidienne, on obtient $Q = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + 2X + 1) = (X^2 + 2X + 2)(X + 1)^2$. On en déduit que

   $$P = (X - 2)^2 Q = (X - 2)^2(X + 1)^2(X^2 + 2X + 2).$$

Exercice 5 Calculer le reste de la division euclidienne de 123^{456} par 7.

Correction. 1$^{\text{ère}}$ méthode. Comme 7 est un nombre premier et que 7 ne divise pas 123, d'après le petit théorème de Fermat, on a $123^6 \equiv 1[7]$. Puisque $2|456$ et $3|456$ ($4 + 5 + 6 = 15$ est un multiple de 3), 456 est un multiple de 6. Donc, $123^{456} = (123^6)^{\frac{456}{6}} \equiv 1^{76} \equiv 1[7]$.

2$^{\text{ème}}$ méthode. Par définition, $123 \equiv 4[7]$. Alors, $123^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 2[7]$ et $123^3 \equiv 4 \cdot 2 = 8 \equiv 1[7]$. Comme 456 est une multiple de 3 ($4 + 5 + 6 = 15$ est un multiple de 3), on en déduit que $123^{456} \equiv (123^3)^{\frac{456}{3}} \equiv (1)^{152} \equiv 1[7]$.