
Exercices

CORRECTION

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 **Assertions mathématiques et quantificateurs.**

Soit $f : E \to F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$(P): \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$
$$(Q): \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y\,.$$

1. Ecrire les négations non(P) et non(Q).

$$\text{non}(P): \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) \neq y$$
$$\text{non}(Q): \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \neq y\,.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.
   L'assertion (P) n'est pas vraie car, e.g., $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$, i.e., f n'est pas constante. Par contre l'assertion (Q) est vraie car pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{y}) = y$, donc f est surjective.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.
   Ni l'assertion (P) ni l'assertion (Q) n'est vraie. Comme $f(0) = 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, d'où la fonction f n'est pas une constante. Comme $|\sin x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par exemple, $f^{-1}(2) = \emptyset$.

Exercice 2 **Somme.**

1. Soit $k \geq 1$, vérifier que $k^4 + 4 = (k^2 + 2k + 2)(k^2 - 2k + 2)$.
   $(k^2 + 2k + 2)(k^2 - 2k + 2) = (k^2 + 2)^2 - (2k)^2 = (k^4 + 4k^2 + 4) - 4k^2 = k^4 + 4$.
2. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{k}{k^4 + 4} = \frac{a}{k^2 - 2k + 2} + \frac{b}{k^2 + 2k + 2}.$$

D'après la question précédente,

$$\frac{a}{k^2 - 2k + 2} + \frac{b}{k^2 + 2k + 2} = \frac{a(k^2 + 2k + 2) + b(k^2 - 2k + 2)}{k^4 + 4},$$

d'où $a(k^2 + 2k + 2) + b(k^2 - 2k + 2) = k$ pour tout $k \geq 1$. Par identification, on a

$$a + b = 0 \qquad \text{et} \qquad 2(a - b) = 1.$$

On en déduit que $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$.

3. En déduire la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+4}.$$
On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+4} &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2-2k+2}-\frac{1}{k^2+2k+2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)^2+1}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2+1} = \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{l^2+1}}_{l=k-1}-\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{l=2}^{n+1}\frac{1}{l^2+1}}_{l=k+1}\end{aligned}$$
d'où c'est une somme téléscopique. On en déduit que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+4} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)$$

Exercice 3 Images directes et réciproques.

Trouver les ensembles suivants. Justifier votre réponse.

1. Déterminer $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right)$, avec $f : x \in [0,2\pi] \mapsto \cos(x)$.
   Comme $\operatorname{Im}(f) = [-1,1]$, $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right) = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right)$. On en déduit que $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right) = \left[0,\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{5}{3}\pi,2\pi\right]$
2. $f^{-1}\left(]-\infty,2]\right)$, avec $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$;
   Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Ceci est équivalent à l'équation $(e^x)^2 - y(e^x) + 1 = 0$ et que le discriminant de cette équation est y^2-4. Comme $e^x > 0$, on en déduit que $y \geq 2$ (car $y^2-4 \geq 0$). Donc la seule valeur possible est $y = 2$ et $e^x = 1$, d'où $f^{-1}(]-\infty,2]) = \{0\}$.
3. $f(\mathbb{R})$ avec $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - e^{-x}$.
   Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Ceci est équivalent à l'équation $(e^x)^2 - y(e^x) - 1 = 0$ et que le discriminant de cette équation est y^2+4. Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, cette équation de e^x admet deux solutions ; l'une strictement positive et l'autre strictement négative. On én déduit que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 4 Injectivité et surjectivité.

1. Soient A, B et C ensembles, $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g est surjective et si $g \circ f$ est injective, f est injective.
   Le cas $g \circ f$: surjective. Par hypothèse, pour tout $c \in C$, il existe $a \in A$ tel que $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$, d'où posant $b = f(a)$, on obtient $g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c$. Donc, g est surjective.
   Le cas $f \circ g$: injective. Soient $a_1, a_2 \in A$ deux éléments vérifiant $f(a_1) = f(a_2)$. On a $(g\circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2)$. Par hypothèse, on en déduit que $a_1 = a_2$, i.e, f est injective.
2. Donner un exemple d'une application f

i) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui est injective mais pas surjective.

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe un entier a et un entier $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $pgcd(a,b) = 1$ et $x = \frac{a}{b}$. Alors, $f(x) := (a,b)$ est une application injective, car une telle expression est unique pour chaque x, mais pas surjective car b est toujours positif.

ii) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ qui est surjective mais pas injective.

Pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on définit l'application f par $f(m,n) = \frac{m}{|n|+1}$ est une application surjective, car tout nombre rationnel admet une expression de la forme $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $f(a, b-1) = \frac{a}{b}$. Cette application n'est pas injective, car par exemple, $f(0,1) = f(0,2) = 0$.