Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2024–2025**

L1 — UE : Algèbre 1(MATH)

Devoir Surveillé 1 - 21 Octobre 2024

Durée : 1h

CORRECTION

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 **Injectivité et surjectivité ($6 = 2 + 2 + 2$ pts).** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Justifier votre réponse.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ définie par $f(n) = (n^3, n^2)$.

Correction. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $f(m) = f(n)$. Alors, $m^3 = n^3$ et $m^2 = n^2$. $m^2 = n^2$ implique que $m = \pm n$ et comme $m^3 = n^3$, on a $m = n$, i.e., f est injective. Par contre, f ne peut être surjective, car par exemple, $(1, 0)$ n'a pas un antécédent.

(b) $g : \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \to [-1, \sqrt{2}]$ définie par $g(x) = \sqrt{2}\sin x$.

Correction. La fonction g étant décroissante et continue, elle prend sa valeur dans $[g(\frac{5}{4}\pi), g(\frac{1}{2}\pi)] = [-1, \sqrt{2}]$. Donc, g est bijective.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x^2 - y^2)$.

Correction. Comme $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, h n'est ni injective ni surjecvtive car $h(0, 0) = (0, 0) = h(1, -1)$ et $(0, 1)$ n'a pas un antécédent car $x+y = 0$ implique $x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = 0$.

Exercice 2 **Images direct et réciproques ($4 = 2 + 2$ pts).** Toutes les réponses doivent être justifiées.

(a) Déterminer $f^{-1}\left(\left]-2, \frac{1}{2}\right[\right)$, avec $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin(x)$.

Correction. Le tableau de variations de la fonction f est comme suit :

x	0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

De plus, par définition, on a $f(0) = f(2\pi) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$ et $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$. Donc, $f^{-1}\left(\left]-2, \frac{1}{2}\right[\right) = \left[0, \frac{1}{6}\pi\right[\cup \left]\frac{5}{6}\pi, 2\pi\right]$.

(c) Montrer que $g : [0, 2] \to [2, 6]; x \mapsto (x-2)^2+2$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Correction. La fonction g étant décroissante, $g(0) = 6$ et $g(2) = 2$, elle est bijective. Pour trouver sa réciproque, posons $y = g(x)$, i.e., $y = (x-2)^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2 = y-2$. Puisque $-2 \leqslant x-2 \leqslant 0$, on a $x - 2 = -\sqrt{y-2}$, d'où $x = -\sqrt{y-2}+2$. Donc, $g^{-1}(y) = -\sqrt{y-2}+2$.

Exercice 3 **Somme ($5 = 1 + 2 + 2$ pts).**

1. Soit $k \geq 1$, vérifier que $k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)$.

   Correction. On a

$$\begin{aligned}(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1) &= \big((k^2 + 1) + k\big)\big((k^2 + 1) - k\big) = (k^2 + 1)^2 - k^2 \\ &= (k^4 + 2k^2 + 1) - k^2 = k^4 + k^2 + 1.\end{aligned}$$

2. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{a}{k^2-k+1} + \frac{b}{k^2+k+1}.$$

Correction. D'après la question précédente, on a

$$\frac{a}{k^2-k+1} + \frac{b}{k^2+k+1} = \frac{a(k^2+k+1)+b(k^2-k+1)}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)} = \frac{(a+b)k^2+(a-b)k+(a+b)}{k^4+k^2+1}.$$

Par identification, celle-ci implique que $a+b=0$ et $a-b=1$, d'où $a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$.

3. En déduire la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}.$$

Correction. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)k+1} - \frac{1}{k(k+1)+1}\right),$$

donc c'est une somme téléscopique :

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k+1} \\ &= \frac{1}{0\cdot 1+1} - \frac{1}{\big((n+1)-1\big)(n+1)+1} = 1 - \frac{1}{n^2+n+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}.$$

Exercice 4 Ensemble ($5 = 1+1+3$ pts) .

Posons $E = \{\,(m,n)\in\mathbb{N}^2 \,|\, m^2-3n^2 = 1\,\}$. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ l'application définie par

$$f(m,n) = (2m+3n, m+2n).$$

1. Vérifier que $(1,0) \in E$.

Correction. $(1,0) \in \mathbb{N}^2$ par définition et $1^2 - 3\cdot 0^2 = 1$, d'où $(1,0)\in E$.

2. Montrer que pour tout $(m,n) \in E$, $f(m,n) \in E$.

Correction. Comme m et n sont deux entiers naturels, $2m+3n$ et $m+2n$ le sont aussi. En plus,

$$\begin{aligned} (2m+3n)^2 - 3(m+2n)^2 &= (4m^2+12mn+9n^2) - 3(m^2+4mn+4n^2) \\ &= (4-3)m^2 + (12-12)mn + (9-12)n^2 = m^2-3n^2 = 1, \end{aligned}$$

d'où $f(m,n) \in E$.

Soit $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{N}^2$ définie par $(x_0,y_0) = (1,0)$ et $(x_{n+1},y_{n+1}) = f(x_n,y_n)$.

3. Montrer que $x_n < x_{n+1}$ et $(x_n,y_n) \in E$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire qu'il existe une infinité d'éléments dans E.

Correction. Montrons que $x_n < x_{n+1}$ et $(x_n,y_n)\in E$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ par récurrence.

(Initialisation) Par définition, $x_0 = 1$ et $x_1 = 2x_0+3y_0 = 2$, d'où on a $x_0 < x_1 \in \mathbb{N}$. Et puis, $(x_0,y_0) = (1,0) \in E$ d'après 1.

(Hérédité) Supossons que l'on a $x_n < x_{n+1}$ et $(x_n, y_n) \in E$ pour un $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n) \in E$. De plus, comme $x_n \in \mathbb{N}$ et $x_n < x_{n+1}$ par l'hypothèse de récurrence, $x_{n+1} > 0$ et

$$\begin{aligned} x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3y_{n+1} \geq & 2x_{n+1} \quad (\text{car } (x_{n+1}, y_{n+1}) \in E \text{ implique que } y_{n+1} \in \mathbb{N}) \\ > & x_{n+1} \quad (\text{car } x_{n+1} > 0), \end{aligned}$$

d'où $x_{n+2} > x_{n+1}$. Donc, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$ et $(x_n, y_n) \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $(x_n, y_n) \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, E contient une infintié d'éléments.

Exercice 5 BONUS ($2 = 1$ (pour la contraposition) $+ 1$ (pour le reste) pts).
Soient A, B, C trois ensembles. Montrer l'implication

$$(A \cup B) \not\subseteq C \quad \Longrightarrow \quad (A \not\subseteq C \ \text{ ou } B \not\subseteq C),$$

en prenant sa contraposée.

Correction Les négations de ≪ $(A \cup B) \not\subseteq C$ ≫ et de ≪ $(A \not\subseteq C$ ou $B \not\subseteq C)$ ≫ sont ≪ $A \cup B \subseteq C$ ≫ et ≪ $(A \subseteq C$ et $B \subseteq C)$ ≫, respectivement. Donc, la contraposition de l'implication ci-dessus est

$$(A \subseteq C \text{ et } B \subseteq C) \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \subseteq C.$$

Montrons cette implication. Soit $x \in A \cup B$, i.e., $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, $A \subseteq C$ implique $x \in C$, et si $x \in B$, $B \subseteq C$ implique $x \in C$. Dans tous les cas, $x \in C$ est toujours valide. Donc, on a $A \cup B \subset C$.