Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2024–2025**

L1 | UE : Algèbre 1 (MATHS)

Exercices

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Assertions mathématiques et quantificateurs.

Soit $f : E \to F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$\begin{aligned} (P): &\quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y \\ (Q): &\quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y\,. \end{aligned}$$

1. Ecrire les négations non(P) et non(Q).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

Exercice 2 Somme.

1. Soit $k \geq 1$, vérifier que $k^4 + 4 = (k^2 + 2k + 2)(k^2 - 2k + 2)$.
2. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,
$$\frac{k}{k^4+4} = \frac{a}{k^2-2k+2} + \frac{b}{k^2+2k+2}.$$
3. En déduire la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+4}.$$

Exercice 3 Images directes et réciproques.

Trouver les ensembles suivants. Justifier votre réponse.

1. Déterminer $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$, avec $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(x)$.
2. $f^{-1}\left(]-\infty, 2]\right)$, avec $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$;
3. $f(\mathbb{R})$ avec $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - e^{-x}$.

Exercice 4 Injectivité et surjectivité.

1. Soient A, B et C ensembles, $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g est surjective et si $g \circ f$ est injective, f est injective.
2. Donner un exemple d'une application
   i) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui est injective mais pas surjective.
   ii) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ qui est surjective mais pas injective.