Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2024–2025**

L1 UE : Algèbre 1(MATH)

Devoir Surveillé 1 - 21 Octobre 2024

Durée : 1h

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

<u>Exercice 1</u> **Injectivité et surjectivité (6 pts).** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Justifier votre réponse.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ définie par $f(n) = (n^3, n^2)$.

(b) $g : \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \to [-1, \sqrt{2}]$ définie par $g(x) = \sqrt{2}\sin x$.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x^2 - y^2)$.

<u>Exercice 2</u> **Images direct et réciproques (4 pts).** Toutes les réponses doivent être justifiées.

(a) Déterminer $f^{-1}\left(\left]-2, \frac{1}{2}\right[\right)$, avec $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin(x)$.

(c) Montrer que $g : [0, 2] \to [2, 6]; x \mapsto (x-2)^2 + 2$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

<u>Exercice 3</u> **Somme (5 pts).**

1. Soit $k \geq 1$, vérifier que $k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)$.
2. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,
$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{a}{k^2 - k + 1} + \frac{b}{k^2 + k + 1}.$$
3. En déduire la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$

<u>Exercice 4</u> **Ensemble (5 pts) .**

Posons $E = \{\, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \,|\, m^2 - 3n^2 = 1 \,\}$. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ l'application définie par
$$f(m, n) = (2m + 3n, m + 2n).$$

1. Vérifier que $(1, 0) \in E$.
2. Montrer que pour tout $(m, n) \in E$, $f(m, n) \in E$.
Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{N}^2$ définie par $(x_0, y_0) = (1, 0)$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$.
3. Montrer que $x_n < x_{n+1}$ et $(x_n, y_n) \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire qu'il existe une infinité d'éléments dans E.

<u>Exercice 5</u> **BONUS (2 pts).**

Soient A, B, C trois ensembles. Montrer l'implication
$$(A \cup B) \not\subseteq C \quad \Longrightarrow \quad (A \not\subseteq C \;\text{ ou } B \not\subseteq C),$$
en prenant sa contraposée.