

Exercices

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Racines n^{eme} Ici, on veut trouver tous les solutions de l'équation suivante en deux étapes :

$$(E) : iz^6 + (3 + 2i)z^3 + 2 - 2i = 0.$$

1. Voir l'équation (E) comme une équation sur z^3 .
 - (a) Calculer les racines carrées de $-3 + 4i$.
 - (b) En déduire les deux valeurs, disons z_1 et z_2 , de z^3 .
2. Ensuite, calculons les racines cubiques de z_1 et z_2 .
 - (a) Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle, i.e., $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
 - (b) En déduire les solutions de l'équation (E) .

Exercice 2 Équation diophantienne

1. Calculer le PGCD de 301 et 217.
2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $301x + 217y = 28$.
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $43x + 31y = 4$.

Exercice 3 Congruence et Théorème de restes chinois

1. Calculer $16^{2024} \pmod{13}$ et $16^{2024} \pmod{17}$.
2. En déduire $16^{2024} \pmod{13 \cdot 17}$.