

UTILISATION DES REVÊTEMENTS  
POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME  
INVERSE DE GALOIS

Sous la direction de Monsieur  
Kenji Iohara

Teddy Mignot

Année universitaire 2010-2011

# Table des matières

## I GROUPES FONDAMENTAUX ET REVÊTEMENTS 3

<b>1</b>	<b>Groupe fondamental</b>	<b>5</b>
1.1	Définitions de base . . . . .	5
1.1.1	Groupe fondamental . . . . .	8
1.2	Calcul du groupe fondamental . . . . .	10
1.2.1	Le groupe fondamental d'un espace numérique . . . . .	11
1.2.2	Le groupe fondamental du cercle $\mathbb{S}^1$ . . . . .	11
1.2.3	Le théorème de Van Kampen . . . . .	14
1.2.4	Le groupe fondamental des espaces projectifs . . . . .	16
1.2.5	Le groupe fondamental des groupes classiques . . . . .	18
1.3	Quelques exemples illustratifs . . . . .	21
1.3.1	Le tore . . . . .	21
1.3.2	Une surface de genre 2 . . . . .	27
1.3.3	La bouteille de Klein . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Revêtements</b>	<b>34</b>
2.1	Définitions et constructions des revêtements . . . . .	34
2.2	Revêtements galoisiens . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Revêtements et groupes fondamentaux</b>	<b>45</b>
3.1	Groupes fondamentaux des revêtements . . . . .	45
3.2	Quelques rappels de théorie de Galois . . . . .	52
3.3	Revêtements/extensions de corps . . . . .	54

## II SURFACES DE RIEMANN 56

<b>4</b>	<b>Revêtements des surfaces de Riemann</b>	<b>60</b>
4.1	Surfaces de Riemann . . . . .	60
4.2	Revêtements des surfaces de Riemann . . . . .	67

4.3	Revêtements du disque unité . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Prolongements des revêtements non ramifiés</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Correspondance revêtements/extensions</b>	<b>77</b>
6.1	Fonctions algébriques . . . . .	77
6.2	Correspondance . . . . .	80
6.3	Application à la sphère de Riemann . . . . .	81
<b>A</b>	<b>Liste des groupes fondamentaux</b>	<b>84</b>
A.1	Groupe fondamental des espaces topologiques familiers : . . .	84
A.2	Groupe fondamental des groupes classiques : . . . . .	85

**PARTIE I**

**GROUPES**

**FONDAMENTAUX ET**

**REVÊTEMENTS**

Dans ce premier chapitre certains résultats, seront admis. Les démontrer demanderait trop de temps et nous éloignerait du sujet qui nous intéresse. Le lecteur pourra trouver des démonstrations complémentaires dans l'ouvrage de Claude Godbillon, [G], dont ce chapitre est inspiré.

# Chapitre 1

## Groupe fondamental

### 1.1 Définitions de base

**Définition 1.1.1.** On considère un espace topologique  $X$ .  $I$  désigne l'intervalle  $[0, 1]$

1. Un **chemin** dans  $X$  est une application continue  $c : I \rightarrow X$ .  $c(0)$  est appelé **origine** de  $c$  et  $c(1)$  l'**extrémité**. Si  $x = c(0), y = c(1)$  on dit que  $c$  est un **chemin joignant  $x$  à  $y$** .
2. Pour tout point  $x \in X$  on désigne par  $c_x$  le **chemin constant** d'origine et d'extrémité  $x$  défini par :  $\forall t \in I, c_x(t) = x$ .
3. Si  $c : I \rightarrow X$  est un chemin joignant  $x$  à  $y$ , on désigne par  $\bar{c}$  le chemin joignant  $y$  à  $x$  défini par  $\bar{c}(t) = c(1 - t)$ ,  $\bar{c}$  est appelé **chemin inverse** de  $c$ .
4. Si  $c$  est un chemin joignant  $x$  à  $y$  et  $c'$  est un chemin joignant  $y$  à  $z$  alors on note  $cc'$  le chemin joignant  $x$  à  $z$  le chemin défini par :

$$cc'(t) = \begin{cases} c(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$cc'$  est le **chemin composé** de  $c$  et  $c'$ .

**Définition 1.1.2.** Deux chemins  $c$  et  $c'$  de  $X$  ayant même origine et même extrémité sont dits **homotopes** s'il existe une application continue

$H : I \times I \rightarrow X$  telle que :

i)  $\forall t \in I, H(t, 0) = c(t)$  et  $H(t, 1) = c'(t)$ .

ii)  $\forall s \in I, H(0, s) = x$  et  $H(1, s) = y$ .

La relation “être homotope à” entre les chemins est alors appelée **relation d’homotopie**.

Plus visuellement, un chemin  $c'$  est homotope à un chemin  $c$  s’il peut être “déformé” continûment en le chemin  $c$  (voir dessin ci-dessous).

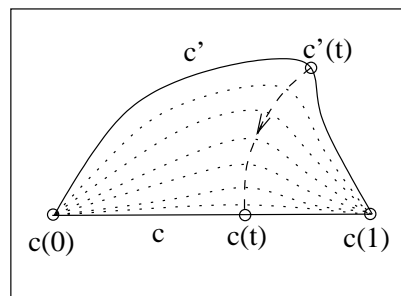


Figure 1.1: Le chemin  $c'$  est homotope à  $c$ .

**Proposition 1.1.1.** *La relation d’homotopie est une relation d’équivalence dans l’ensemble des chemins joignant  $x$  à  $y$ .*

Nous allons par la suite considérer l’ensemble des classes d’homotopie des chemins joignant  $x$  à  $y$  que nous noterons  $\Pi_{x,y}(X)$ .

Notons  $[c]$  les éléments de  $\Pi_{x,y}(X)$ , et

$$\Pi(X) = \bigcup_{x,y \in X} \Pi_{x,y}(X)$$

. Nous allons munir ce dernier ensemble d’une loi de composition interne “.” définie par  $[c][c'] = [cc']$  lorsque cela a un sens (i.e. lorsque  $c(1) = c'(0)$ ) L’étude des propriétés de la relation d’homotopie vont nous permettre de déduire celles de la loi “.”.

**Théorème 1.1.2.** *Soient  $c, \gamma$  deux chemins homotopes joignant  $x$  à  $y$  et  $c', \gamma'$  deux chemins homotopes joignant  $y$  à  $z$ . On a alors :*

i) *Les chemins inverses  $\bar{c}$  et  $\bar{\gamma}$  sont homotopes.*

ii) *Les chemins composé  $cc'$  et  $\gamma\gamma'$  sont homotopes.*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre V.1.3.

Ce théorème assure la définition de la loi “.” lorsque  $c(1) = c'(0)$ .

**Théorème 1.1.3.** *Soient  $c_1$  un chemin joignant  $x$  à  $y$ ,  $c_2$  joignant  $y$  à  $z$  et  $c_3$  joignant  $z$  à  $u$ . Les chemins  $(c_1c_2)c_3$  et  $c_1(c_2c_3)$  sont alors homotopes.*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre V.1.4.

Par conséquent, on a  $([c_1][c_2])[c_3] = [(c_1c_2)c_3] = [c_1(c_2c_3)] = [c_1]([c_2][c_3])$ . La loi “.” est donc “associative”.

**Théorème 1.1.4.** *Soit  $c$  un chemin joignant  $x$  à  $y$ . Les chemins  $cc_y$  et  $c_xc$  sont homotopes à  $c$ .*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre V.1.6.

On en déduit :  $[c][c_y] = [c]$  et  $[c_x][c] = [c]$ .

Les classes  $[c_x]$  et  $[c_y]$  sont donc les éléments neutres respectivement à droite et à gauche pour la loi “.”.

**Théorème 1.1.5.** *Soit  $c$  un chemin joignant  $x$  à  $y$ .  $c\bar{c}$  et  $\bar{c}c$  sont alors homotopes respectivement à  $c_x$  et  $c_y$ .*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre V.1.7.

On a alors  $[c][\bar{c}] = [c_x]$  et  $[\bar{c}][c] = [c_y]$ .

Ce théorème se traduit donc par le fait que  $[\bar{c}]$  est l'inverse de  $[c]$  pour la loi “.”.

On constate que la loi “.” présente toutes les caractéristiques d'une loi de groupe, mais qu'elle n'est pas définie sur  $\Pi(X) \times \Pi(X)$  tout entier. Elle ne permet donc pas de munir  $\Pi(X)$  d'une structure de groupe.



### 1.1.1 Groupe fondamental

**Définition 1.1.3.** Soit  $x \in X$ . Un **lacet de base**  $x$  dans  $X$  est un chemin d'origine et d'extrémité  $x$  dans  $X$ . On note  $\pi_1(X, x)$  l'ensemble  $\Pi_{x,x}(X)$  des classes d'homotopies des lacets de base  $x$  dans  $X$ .

**Théorème 1.1.6.** D'après ce qui précède, la composition des chemins induit une structure de groupe sur l'ensemble  $\pi_1(X, x)$ . ( L'élément neutre étant alors  $[c_x]$  et  $[\bar{c}]$  l'inverse de  $[c]$  )

**Définition 1.1.4.** Le groupe  $\pi_1(X, x)$  est appelé **groupe fondamental** de  $X$  au point  $x$ .

**Proposition 1.1.7.** Soit  $c$  un chemin d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$  dans  $X$ . L'application  $\alpha_c : [\gamma] \mapsto [c\gamma\bar{c}]$  est un isomorphisme de  $\pi_1(X, y)$  sur  $\pi_1(X, x)$  qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $[c]$ .  
Si  $c'$  est un second chemin joignant  $x$  à  $y$ , alors les isomorphismes  $\alpha_c$  et  $\alpha_{c'}$  sont conjugués dans  $\pi_1(X, x)$ .

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre V.2.3.

**Corollaire 1.1.8.** Si  $x$  et  $y$  sont dans une même composante connexe par arcs de  $X$ , les groupes  $\pi_1(X, x)$  et  $\pi_1(X, y)$  sont alors isomorphes.  
En particulier, si  $X$  est connexe par arc tous ses groupes fondamentaux sont isomorphes et on parlera alors du groupe fondamental  $\pi_1(X)$  de  $X$ .

Ceci nous permet d'introduire la notion d'espace simplement connexe :

**Définition 1.1.5.** Un espace  $X$  est dit **simplement connexe** s'il est connexe par arcs et si tous ses groupes fondamentaux  $\pi_1(X, x)$  sont triviaux.  
( Il suffit pour cela qu'un seul de ces groupes fondamentaux soit trivial. )

Un exemple d'espace topologique simplement connexe est le plan  $\mathbb{R}^2$ . En effet, si l'on trace un lacet sur ce plan, on remarque que l'on peut le déformer continûment jusqu'à obtenir un lacet trivial. Nous verrons une démonstration de ceci dans la partie 1.2.1.

Considérons à présent deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$ .  
Si  $f$  est une application continue de  $X$  dans  $Y$  et  $c$  un chemin joignant  $x$  à  $y$  dans  $X$ , alors  $f \circ c$  est un chemin joignant  $f(x)$  à  $f(y)$  dans  $Y$ . On remarque

alors que :

- La composition  $c \mapsto f \circ c$  est compatible avec l'homotopie des chemins ( i.e.  $[c] = [c'] \Rightarrow [f \circ c] = [f \circ c']$  ), ainsi qu'avec la composition des chemins ( i.e.  $f \circ (cc') = (f \circ c)(f \circ c')$  ).

- $f$  induit donc une application  $f_* : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$  telle que :  
 $f_*(\alpha\beta) = f_*(\alpha)f_*(\beta)$  ( lorsque  $\alpha\beta$  est bien défini ).

**Proposition 1.1.9.** *Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit un morphisme de groupe  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ . De plus :*

- si  $f = Id_X$ , alors  $f_* = Id_{\pi_1(X, x)}$
- si  $g : Y \rightarrow Z$  est une application continue, on a  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre V.3.1.

**Corollaire 1.1.10.** *Si  $f$  est un homéomorphisme de  $X$  sur  $Y$ , alors  $f_*$  est un isomorphisme de  $\pi_1(X, x)$  sur  $\pi_1(Y, f(x))$ , et on a alors  $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$ .*

Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont des espaces connexes par arcs, ce théorème se traduit par le fait que *deux espaces connexes par arcs homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Le groupe fondamental constitue donc un invariant topologique des espaces connexes par arcs.

**Remarque 1.1.1.** *Si  $f$  est une application continue injective ( resp. surjective ),  $f_*$  n'est pas nécessairement injective ( resp. surjective ). Nous verrons un contre-exemple dans la conséquence 1.2.11, lorsque nous serons en mesure de calculer le groupe fondamental de certains espace topologiques.*

Nous avons cependant la proposition suivante :

**Proposition 1.1.11.** *Soit  $C$  la composante connexe par arcs de  $x$  dans  $X$ . L'injection canonique  $i : C \rightarrow X$  induit un isomorphisme  $i_*$  de  $\pi_1(C, x)$  sur  $\pi_1(X, x)$ .*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre V.3.3.

## 1.2 Calcul du groupe fondamental

**Proposition 1.2.1.** Soient  $X, Y$  des espaces topologiques.

On note  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) la projection de  $X \times Y$  sur  $X$  (resp.  $Y$ ) Si  $(x, y) \in X \times Y$ , l'application  $(p_1)_* \times (p_2)_*$  est un isomorphisme de  $\pi_1(X \times Y, (x, y))$  sur  $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ .

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VI.1.1.

**Remarque 1.2.1.** L'isomorphisme inverse de cette application est alors l'application  $\phi : ([c_1], [c_2]) \mapsto ((i_1)_*[c_1])((i_2)_*[c_2])$ , où  $i_1 : x \mapsto (x, y)$  (resp.  $i_2 : y \mapsto (x, y)$ ) pour  $y$  (resp.  $x$ ) fixé quelconque.

**Corollaire 1.2.2.** Si  $Y$  est simplement connexe, la projection  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  induit un isomorphisme  $(p_1)_*$  de  $\pi_1(X \times Y, (x, y))$  sur  $\pi_1(X, x)$ .

**Corollaire 1.2.3.** Si  $X$  et  $Y$  sont simplement connexes leur produit  $X \times Y$  est aussi simplement connexe.

**Définition 1.2.1.** Un sous-espace  $Y$  d'un espace  $X$  est un **rétracte par déformation** de  $X$  s'il existe une application continue  $r : X \rightarrow Y$  telle que  $r|_Y = Id_Y$  et une application continue  $H : X \times I \rightarrow X$  ayant les propriétés suivantes :

- $H(x, 0) = x$  pour tout  $x \in X$ .
- $H(x, 1) = r(x)$  pour tout  $x \in X$ .
- $H(x, t) = x$  pour tout  $x \in Y$  et tout  $t \in I$ .

On dit alors que  $r$  est une **rétraction par déformation** de  $X$  sur  $Y$ .

**Exemple 1.2.1.** On note  $\mathbb{S}^{m-1}$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^m$ , pour  $m \geq 1$ .  $\mathbb{S}^{m-1}$  est un rétracte par déformation de  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . En effet, on peut poser, pour  $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ,  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ . En considérant  $H(x, t) = t \frac{x}{\|x\|} + (1-t)x$ , on vérifie que  $r$  est une rétraction par déformation de  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  sur  $\mathbb{S}^{m-1}$ .

**Proposition 1.2.4.** Soit  $Y$  un sous-espace d'un espace  $X$ ,  $i$  l'injection de  $Y$  dans  $X$  et  $x \in Y$ . Si  $Y$  est un rétracte par déformation de  $X$ , le morphisme induit  $i_* : \pi_1(Y, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  est alors un isomorphisme.

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VI.1.6.

Nous allons à présent calculer le groupe fondamental de certains espaces topologiques.

### 1.2.1 Le groupe fondamental d'un espace numérique

On rappelle qu'un espace numérique est un espace topologique  $X$  tel qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X$  soit homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  (Un tel espace est alors nécessairement connexe par arcs).

Un tel espace  $X$  a donc un groupe fondamental  $\pi_1(X)$  isomorphe à  $\pi_1(\mathbb{R}^n)$  (cf. corollaire 1.1.10) qui est homéomorphe à  $(\pi_1(\mathbb{R}))^n$  (cf. Proposition 1.2.1).

On s'est donc ramené au calcul du groupe fondamental de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 1.2.5.** *L'espace topologique  $\mathbb{R}$  est simplement connexe.*

*Démonstration.* Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}$  un lacet (de base 0) dans  $\mathbb{R}$  et soit  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  l'application continue définie par  $H(t, s) = sc(t)$ . Puisque  $c(0) = c(1) = 0$ , on a  $H(0, s) = H(1, s) = 0$  pour tout  $s \in I$ . Par ailleurs  $H(t, 0) = 0$  et  $H(t, 1) = c(t)$  pour tout  $t \in I$ . Par conséquent le chemin  $c$  est homotope au chemin constant  $c_0$ .  $\mathbb{R}$  est donc simplement connexe.

□

Par conséquent tout espace numérique est simplement connexe.

### 1.2.2 Le groupe fondamental du cercle $\mathbb{S}^1$

On rappelle que le cercle  $\mathbb{S}^1$  est connexe par arcs.  $\mathbb{S}^1$  sera ici considéré comme l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Dans cette partie nous noterons  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  la projection  $t \mapsto e^{2i\pi t}$ , et pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma_n$  désignera le lacet de base 1 dans  $\mathbb{S}^1$ , défini par  $\gamma_n(t) = p(nt)$  pour tout  $t \in I$ .

**Théorème 1.2.6.** *Le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{S}^1, *)$  du cercle  $\mathbb{S}^1$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .*

*Plus précisément, l'application  $n \mapsto [\gamma_n]$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}$  sur  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ .*

(Puisque  $\mathbb{S}^1$  est connexe par arcs, pour tout  $z \in \mathbb{S}^1$ ,  $\pi_1(\mathbb{S}^1, z) = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ . Il nous suffit donc de montrer que  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ .)

Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 1.2.7.** *Si  $c : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  est un lacet de base 1 dans  $\mathbb{S}^1$ , il existe un unique chemin  $\tilde{c}$  dans  $\mathbb{R}$  ayant 0 pour origine et tel que  $p \circ \tilde{c} = c$ .  $\tilde{c}$  est alors appelé un **relèvement** de  $c$*

*Démonstration.* Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  la projection  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  est un homéomorphisme de  $]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$  sur l'ouvert  $\mathbb{S}^1 \setminus \{-p(a)\}$ . Par conséquent si l'on note  $p_a^{-1}$  l'homéomorphisme inverse de  $p$ , et si  $\tilde{c}_1$  et  $\tilde{c}_2$  sont deux applications vérifiant la propriété de l'énoncé, alors elles vérifient  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = c \circ p_a^{-1}$  pour tout  $t \in ]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$ . Donc  $\tilde{c}_1$  et  $\tilde{c}_2$  coïncident sur tout intervalle  $]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$ , donc sur  $\mathbb{R}$ . D'où l'unicité de  $\tilde{c}$ .

Par ailleurs,  $c$  étant continu sur le segment  $I$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour tous  $t, t'$  tels que  $|t - t'| \leq \frac{1}{n}$ ,  $\|c(t) - c(t')\| \leq 1$  (continuité uniforme), et donc  $1 - \operatorname{Re} \left( c(t) \overline{c(t')} \right) = \frac{\|c(t) - c(t')\|^2}{2} \leq \frac{1}{2}$ . On a donc  $c(t) \overline{c(t')} \neq -1$ . Donc pour  $t, t'$  tels que  $|t - t'| \leq \frac{1}{n}$ ,  $p_0^{-1} \left( c(t) \overline{c(t')} \right)$  est bien défini. Par conséquent, on peut définir une application  $\tilde{c}$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\tilde{c}(t) = p_0^{-1} \left( c(t) \overline{c\left(\frac{j}{n}\right)} \right) + \sum_{i=1}^j p_0^{-1} \left( c\left(\frac{i}{n}\right) \overline{c\left(\frac{i-1}{n}\right)} \right)$$

pour  $\frac{j}{n} \leq t \leq \frac{j+1}{n}$ .

Cette application est continue et vérifie  $\tilde{c}(0) = 0$  et  $p \circ \tilde{c} = c$ .

□

**Définition 1.2.2.** *Si  $\tilde{c}$  est le chemin correspondant au lacet  $c$  dans le lemme précédent, le réel  $\tilde{c}(1)$  est alors un entier appelé **le degré du lacet**  $c$ , et on le notera  $\operatorname{deg}(c)$ . En particulier, on vérifie que le degré du lacet  $\gamma_n$  est  $n$ .*

**Lemme 1.2.8.** *Si  $H$  est une application continue de  $I \times I$  dans  $\mathbb{S}^1$  telle que  $H(0,0) = 1$ , alors il existe une unique application  $\tilde{H}$  de  $I \times I$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\tilde{H}(0,0) = 0$  et  $p \circ \tilde{H} = H$ .*

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 1.2.7.

**Définition 1.2.3.** L'application  $\tilde{H}$  est appelée **un relèvement de  $H$** .

**Proposition 1.2.9.** Deux lacets  $c$  et  $\gamma$  de base 1 dans  $\mathbb{S}^1$  sont homotopes si et seulement s'ils ont même degré.

*Démonstration.* Si  $c$  et  $\gamma$  ont même degré, alors leurs relèvements  $\tilde{c}$  et  $\tilde{\gamma}$  ont mêmes extrémités. L'application continue  $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\tilde{H}(t, s) = (1-s)\tilde{c}(t) + s\tilde{\gamma}(t)$  est alors une homotopie de  $\tilde{c}$  à  $\tilde{\gamma}$ . Par conséquent on vérifie que  $H = p \circ \tilde{H}$  est une homotopie de  $c$  à  $\gamma$ .

Réciproquement, si  $H$  est une homotopie de  $c$  à  $\gamma$ , et si  $\tilde{H}$  est le relèvement de  $H$ , alors les applications  $\tilde{c} : t \mapsto \tilde{H}(t, 0)$  et  $\tilde{\gamma} : t \mapsto \tilde{H}(t, 1)$  les relèvements de  $c$  et  $\gamma$  et  $\tilde{c}(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\gamma}(1)$ .  $c$  et  $\gamma$  ont donc même degré. □

**Proposition 1.2.10.** Soient  $c$  et  $\gamma$  deux lacets de base 1 dans  $\mathbb{S}^1$ . On a alors  $\deg(c\gamma) = \deg(c) + \deg(\gamma)$ .

*Démonstration.* Si  $\tilde{c}$  et  $\tilde{\gamma}$  sont des relèvements de  $c$  et  $\gamma$ , alors l'application  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $a(t) = \begin{cases} \tilde{c}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(2t-1) + \tilde{c}(1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$  est un relèvement de  $c\gamma$ .

Ces deux dernières propositions nous permettent de conclure que  $\phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $\phi([c]) = \deg(c)$  est un morphisme ayant pour inverse l'application  $n \mapsto [\gamma_n]$ . Cette dernière application est donc un isomorphisme de groupe et donc :

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$$

**Conséquence 1.2.11.** • Nous avons alors un exemple d'application injective d'un espace  $X$  dans un espace  $Y$  qui n'induit pas une injection de  $\pi_1(X)$  dans  $\pi_1(Y)$ . En effet,  $\mathbb{S}^1$  s'injecte naturellement dans  $\mathbb{R}^2$ , mais il n'existe pas d'injection de  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$  dans  $\pi_1(\mathbb{R}^2) \simeq \{1\}$ .

- Le groupe fondamental de l'espace  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . En effet nous avons déjà établi que le cercle  $\mathbb{S}^1$  est un rétracte par déformation de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Donc, d'après la proposition 1.2.4,  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ .

### 1.2.3 Le théorème de Van Kampen

On considère  $X$  un espace connexe par arcs tel que  $X = X_1 \cup X_2$  où  $X_1$  et  $X_2$  sont des ouverts non vides connexes par arcs tels que  $X_0 = X_1 \cap X_2$  soit lui aussi non vide et connexe par arcs.

**Notations.** Si  $x \in X_0$ , on pose :

- $\pi_1(X_\alpha)$  est le groupe fondamental  $\pi_1(X_\alpha, x)$  pour  $\alpha = 0, 1, 2$ .
- $\pi_1(X) = \pi_1(X, x)$ .
- $j_\alpha$  le morphisme de  $\pi_1(X_0)$  dans  $\pi_1(X_\alpha)$  induit par l'injection de  $X_0$  dans  $X_\alpha$  pour  $\alpha = 1, 2$ .
- $k_\alpha$  le morphisme de  $\pi_1(X_\alpha)$  dans  $\pi_1(X)$  induit par l'injection de  $X_\alpha$  dans  $X$  pour  $\alpha = 0, 1, 2$ .

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X_1) & \xrightarrow{k_1} & \pi_1(X) \\
 j_1 \uparrow & \nearrow k_0 & \uparrow k_2 \\
 \pi_1(X_0) & \xrightarrow{j_2} & \pi_1(X_2)
 \end{array}$$

**Proposition 1.2.12.** *Le groupe  $\pi_1(X)$  est engendré par les images de  $k_{1*}$  et de  $k_{2*}$ .*

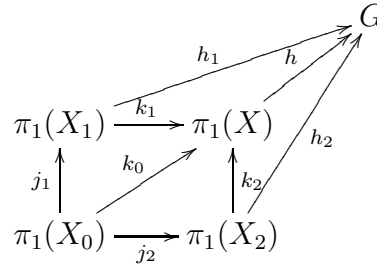
*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VI.4.1.

**Corollaire 1.2.13.** *Si  $X_1$  et  $X_2$  sont simplement connexes, alors  $X = X_1 \cup X_2$  est simplement connexe.*

**Corollaire 1.2.14.** *Si  $m \geq 2$  alors  $\mathbb{S}^m$  est simplement connexe.*

**Théorème 1.2.15** (Van Kampen). *Si  $h_\alpha$  est un morphisme  $\pi_1(X_\alpha)$  dans un groupe  $G$  pour  $\alpha = 1; 2$ , et si  $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$ , alors il existe un unique morphisme  $h$  de  $\pi_1(X)$  dans  $G$  tel que  $h \circ k_\alpha = h_\alpha$  pour  $\alpha = 1; 2$ .*

*Ce théorème signifie donc que le diagramme ci-dessous est commutatif :*



*Démonstration.* Voir [G].Chapitre X.1.1.

**Proposition 1.2.16.** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux groupes. Il existe un groupe  $G$  et des morphismes (injectifs)  $h_1 : H_1 \rightarrow G$  et  $h_2 : H_2 \rightarrow G$  ayant les propriétés suivantes :

1.  $G$  est engendré par  $Im(h_1)$  et  $Im(h_2)$ ,
2. si  $k_i : H_i \rightarrow K$ , pour  $i = 1, 2$ , sont deux morphismes dans un groupe  $K$ , alors il existe un unique morphisme  $k : G \rightarrow K$  tel que  $k_i = k \circ h_i$ , pour  $i = 1, 2$ .

$G$  est alors unique à isomorphisme près. On appelle  $G$  le **produit libre** de  $H_1$  et  $H_2$ , et on note  $G = H_1 \star H_2$ .

**Remarque 1.2.2.** Lorsque les  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ , sont des groupes libres engendrés par  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , alors  $H_1 \star H_2$  est isomorphe au groupe libre engendré par  $A_1 \cup A_2$ .

**Remarque 1.2.3** (important). Nous pouvons reformuler le théorème de Van Kampen de la façon suivante :

$\pi_1(X_1 \cup X_2) = \pi_1(X_1) \star_{\pi_1(X_0)} \pi_1(X_2) := \pi_1(X_1) \star \pi_1(X_2) / \langle (k_1 \circ j_1(g))(k_2 \circ j_2(g))^{-1}, g \in \pi_1(X_1 \cap X_2) \rangle$  (La notation  $\star_{\pi_1(X_0)}$  s'appelle **produit amalgamé**).

On a alors une formule explicite pour le groupe fondamental de  $X$  : c'est le produit libre des groupes fondamentaux de  $X_1$  et de  $X_2$  quotienté par la relation qui identifie les classes des lacets de  $X_1 \cap X_2$ .

**Corollaire 1.2.17.** Si  $X_0 = X_1 \cap X_2$  est simplement connexe, alors  $\pi_1(X)$  est isomorphe au produit libre  $\pi_1(X_1) \star \pi_1(X_2)$ .



**Exemple 1.2.2.** On pose  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$  l'espace  $\mathbb{R}^2$  privé de deux points. On peut supposer  $p_1 = (0, 0)$  et  $p_2 = (1, 0)$ . Posons alors  $X_1 = \{(x, y), x \leq \frac{1}{2}\}$  et  $X_2 = \{(x, y), x \geq \frac{1}{2}\}$ . On a alors  $X_1 \cap X_2 = \{(x, y), x = \frac{1}{2}\}$  qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , donc simplement connexe.

D'après le corollaire 1.2.17,  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X_1) \star \pi_1(X_2)$ . Or  $X_1$  et  $X_2$  sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  qui a pour groupe fondamental le groupe libre engendré par un élément  $F_{a_1} \simeq \mathbb{Z}$ . Par conséquent,  $\pi_1(X)$  est le groupe libre engendré par deux éléments  $F_{a_1, a_2}$ .

On peut généraliser ceci au cas de l'espace  $\mathbb{R}^2$  privé de  $n$  points  $p_1, \dots, p_n$ . Le groupe fondamental de cet espace sera alors le groupe libre engendré par  $n$  éléments  $F_{a_1, \dots, a_n}$ .

**Corollaire 1.2.18.** Si  $X_2$  est simplement connexe, et si  $J_1$  est le sous-groupe distingué de  $\pi_1(X_1)$  engendré par l'image de  $j_1$ , le groupe fondamental de  $X$  est isomorphe au groupe quotient  $\pi_1(X_1)/J_1$ .

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VI.4.8.

## 1.2.4 Le groupe fondamental des espaces projectifs

Nous allons à présent utiliser le théorème de Van Kampen pour calculer le groupe fondamental des espaces projectifs complexes.

Pour cela, il nous faut avant tout introduire la notion de décomposition cellulaire :

**Définition 1.2.4.** On considère  $K$  un espace topologique séparé. Une **partition en cellules** de  $K$  est une partition  $\pi$  de  $K$  dont chaque partie est homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$ , l'entier  $m$  est alors appelé la **dimension** de cette partie. On désigne alors par  $K^m$  la réunion des éléments de  $\pi$  de dimension inférieure ou égale à  $m$ .

Une **décomposition cellulaire** de  $K$  est une partition en cellules de  $K$  telle que, pour chaque élément  $e$  de dimension  $m$  de cette partition, il existe une application continue  $f$  de la boule fermée  $D^m$  dans  $K^m$  vérifiant :

1.  $f(\mathbb{S}^{m-1}) \subset K^{m-1}$ .
2.  $f|_{D^m \setminus \mathbb{S}^{m-1}}$  est un homéomorphisme de  $D^m \setminus \mathbb{S}^{m-1}$  sur  $e$ .

Si  $K$  admet une décomposition cellulaire, on dit que :

- $K$  est un **complexe cellulaire**
- $K^m$  est le **squelette de dimension  $m$**  de  $K$
- $e$  est une **cellule de dimension  $m$**  de  $K$
- $f$  est une **application d'attachement** de la cellule  $e$

On dit qu'un complexe cellulaire  $K$  est **fini** s'il admet un nombre fini de cellules.

Une décomposition cellulaire de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^m\mathbb{C}$  est déterminée par  $\mathbb{P}^m\mathbb{C} = \mathbb{A}^m\mathbb{C} \cup \mathbb{A}^{m-1}\mathbb{C} \cup \dots \cup \mathbb{A}^1\mathbb{C} \cup \mathbb{A}^0\mathbb{C}$  (où  $\mathbb{A}^p\mathbb{C}$  désigne l'espace affine complexe de dimension  $p$ ).

La suite des squelettes de dimension  $2p$  est alors  $\mathbb{P}^0\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C} \subset \dots \subset \mathbb{P}^m\mathbb{C}$ .

**Théorème 1.2.19.** *Soit  $K$  un complexe cellulaire fini connexe, et soit  $x$  un point du squelette  $K^2$ . L'injection  $i$  de  $K^2$  dans  $K$  induit un isomorphisme de  $\pi_1(K^2, x)$  sur  $\pi_1(K, x)$ .*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VI.5.3.

**Corollaire 1.2.20.** *L'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^m\mathbb{C}$  où  $m \geq 0$  est simplement connexe.*

*Démonstration.* Si  $m = 0$ ,  $\mathbb{P}^m\mathbb{C}$  est alors réduit à un point.

Si  $m > 0$ , le squelette de dimension 2 de  $\mathbb{P}^m\mathbb{C}$  est alors  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ . Donc par le théorème précédent, on a  $\pi_1(\mathbb{P}^m\mathbb{C}, x) \simeq \pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, x)$ .

Par ailleurs,  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui est simplement connexe (cf. corollaire 1.2.14) Par conséquent,  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  est également simplement connexe.

□

Nous pourrions déterminer de manière analogue le groupe fondamental de l'espace projectif réel  $\mathbb{P}^m\mathbb{R}$ , en considérant la décomposition cellulaire  $\mathbb{P}^m\mathbb{R} = \mathbb{A}^m\mathbb{R} \cup \dots \cup \mathbb{A}^1\mathbb{R} \cup \mathbb{A}^0\mathbb{R}$ , mais c'est plus compliqué, et nous verrons, d'autre part, dans le chapitre 3 qu'il est possible de déterminer le groupe fondamental de cet espace d'une autre manière. Nous établirons alors que  $\pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$  et  $\pi_1(\mathbb{P}^m\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  pour  $m \geq 2$ . Voir 3.1.2 pour les détails.

## 1.2.5 Le groupe fondamental des groupes classiques

Nous allons à présent nous intéresser au groupe fondamental des groupes topologiques classiques sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

**Lemme 1.2.21.** *Soit  $G$  un groupe classique admettant une décomposition polaire, c'est-à-dire un homéomorphisme  $G \simeq K \times A$  où  $A$  est un espace affine et  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ . On a alors :  $\pi_1(G) \simeq \pi_1(K)$ .*

*Démonstration.* Si  $G \simeq K \times A$ , alors d'après la proposition 1.2.1,  $\pi_1(G) \simeq \pi_1(K) \times \pi_1(A)$ . Or  $A$  est un espace numérique, donc simplement connexe, et donc  $\pi_1(G) \simeq \pi_1(K)$ .

□

Pour plus de détails sur la décomposition polaire, voir, e.g. [M].

Nous allons donc exhiber les groupes fondamentaux des groupes (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(M) = 1\},$$

$$O_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^tMM = I_n\},$$

$$SO_n(\mathbb{K}) = \{M \in O_n(\mathbb{K}), \det(M) = 1\},$$

$$O_{p,q}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}), {}^tMI_{p,q}M = I_{p,q}\} \text{ où } I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

$$U_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{M}M = I_n\},$$

$$SU_n(\mathbb{C}) = \{M \in U_n(\mathbb{C}), \det(M) = 1\},$$

$$U_{p,q}(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}), {}^t\bar{M}I_{p,q}M = I_{p,q}\},$$

$$Sp_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}), {}^tMJM = J\} \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$Sp(n) = Sp_n(\mathbb{C}) \cap U_{2n}(\mathbb{C}).$$

**Théorème 1.2.22.** *On a les isomorphismes :*

$$\pi_1(SO_2(\mathbb{R}), 1) \simeq \mathbb{Z},$$

$$\pi_1(SO_m(\mathbb{R}), 1) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ pour } m \geq 3.$$

*Démonstration.*

- Le groupe  $SO_2(\mathbb{R})$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$  (via l'homéomorphisme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mapsto e^{i\theta}$ ) et donc,  $\pi_1(SO_2(\mathbb{R}), 1) \simeq \mathbb{Z}$ .

La deuxième partie de ce théorème se démontre par récurrence sur  $m \geq 3$ .

- On montre que le groupe  $SO_3(\mathbb{R})$  est homéomorphe à l'espace projectif  $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ . Pour cela, on fait agir les quaternion de norme 1 sur l'ensemble des quaternions  $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$  (ici, on identifiera  $\mathbb{S}^3$  à l'ensemble des quaternions de norme 1) :  $\forall q \in \mathbb{S}^3, x \in \mathbb{H} \mapsto qxq^{-1}$ .

Cette action laisse  $\{xi + yj + zk \in \mathbb{H}\} \simeq \mathbb{R}^3$  invariant. Donc, à tout élément  $q \in \mathbb{S}^3$ , on associe une isométrie  $h(q)$  de  $\mathbb{R}^3$ , donc un élément de  $O_3(\mathbb{R})$ , et plus précisément, par connexité de  $\mathbb{S}^3$ , un élément de  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Le noyau de  $q \mapsto h(q)$  est alors  $\{-1, 1\}$ .

De plus l'application  $q \mapsto h(q)$  est surjective (par exemple, si  $q = \cos\theta + i\sin\theta$  on a  $h(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ ).

Par conséquent,  $SO_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}^3\mathbb{R}$  donc  $\pi_1(SO_3(\mathbb{R}), 1) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

- On suppose que  $\pi_1(SO_{m-1}(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  avec  $m \geq 4$ .

Soit  $n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{m-1}$ , et  $U = \mathbb{S}^{m-1} \setminus \{-n\}$ ,  $V = \mathbb{S}^{m-1} \setminus \{n\}$ . On note  $q : SO_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ ,  $\alpha \mapsto \alpha(n)$ . On peut alors montrer (cf.[G].Chapitre VI.6.1) que  $U \times SO_{m-1}(\mathbb{R}) \simeq q^{-1}(U)$  et  $V \times SO_{m-1}(\mathbb{R}) \simeq q^{-1}(V)$ .

Or, puisque  $m \geq 4$ , les morphismes induits par les injections de  $q^{-1}(U \cup V)$  dans  $q^{-1}(U)$  et  $q^{-1}(V)$ ,  $j_1 : \pi_1(q^{-1}(U \cup V)) \rightarrow \pi_1(q^{-1}(U))$  et  $j_2 : \pi_1(q^{-1}(U \cup V)) \rightarrow \pi_1(q^{-1}(V))$  sont des isomorphismes. Donc, d'après le théorème de Van Kampen on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & G \\
 & & & \nearrow & \nearrow \\
 & & & \simeq & h \\
 \pi_1(q^{-1}(U)) & \xrightarrow{k_1} & \pi_1(q^{-1}(U \cap V)) & \xrightarrow{\simeq} & \\
 \uparrow \simeq & \nearrow k_0 & \uparrow k_2 & & \\
 \pi_1(q^{-1}(U \cup V)) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_1(q^{-1}(V)) & & 
 \end{array}$$

Par conséquent,  $k_1$  et  $k_2$  sont aussi des isomorphismes (admettent  $h$  comme "réciproque")

Donc, on a finalement :  $\pi_1(q^{-1}(U)) \simeq \pi_1(q^{-1}(U \cap V)) = \pi_1(SO_m(\mathbb{R}))$ .  
Or, on a vu que  $\pi_1(q^{-1}(U)) \simeq \pi_1(SO_{m-1}(\mathbb{R}))$  et  $\pi_1(SO_{m-1}(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$   
par hypothèse de récurrence. Donc  $\pi_1(SO_m(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Corollaire 1.2.23.**  $\pi_1(O_2(\mathbb{R}), 1) \simeq \mathbb{Z}$ ,  
 $\pi_1(O_m(\mathbb{R}), 1) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  pour  $m \geq 3$ .

Par ailleurs, en faisant agir l'espace  $SU_m(\mathbb{C})$  sur la sphère  $\mathbb{S}^{2m-1}$ , on démontre de façon analogue le théorème suivant :

**Théorème 1.2.24.** *Le groupe  $SU_m(\mathbb{C})$  est simplement connexe pour  $m \geq 0$ .*

**Corollaire 1.2.25.** *Pour tout  $m \geq 1$ ,  $\pi_1(U_m(\mathbb{C}), 1) \simeq \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* C'est immédiat, en considérant l'homéomorphisme :  $U_m(\mathbb{C}) \simeq \{\lambda I_m \mid \lambda^n \in \mathbb{U}\} \times SU_m(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^1 \times SU_m(\mathbb{C})$  (où  $\mathbb{U}$  désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1).

Par la même méthode que pour le calcul du groupe fondamental de  $SO_m(\mathbb{R})$  et  $SU_m(\mathbb{C})$ , on peut déterminer le groupe fondamental de  $Sp(n) = Sp_n(\mathbb{C}) \cap U_{2n}(\mathbb{C})$

**Théorème 1.2.26.** *Pour  $n \geq 1$ , le groupe topologique  $Sp(n)$  est simplement connexe.*

En effet, on peut montrer que  $Sp(n) \simeq O_n(\mathbb{H}) = \{M \in M_n(\mathbb{H}) \mid {}^t \bar{M} M = 1\}$  où  $\mathbb{H}$  est le corps des quaternions, et pour  $q = x + yi + zj + tk \in \mathbb{H}$ ,  $\bar{q} = x - yi - zj - tk$ . En faisant alors agir cet espace sur  $\mathbb{S}^{4n-1}$ , on démontre, comme pour  $SU_m(\mathbb{C})$ , que  $Sp(n)$  est simplement connexe. Nous sommes à présent en mesure de déterminer les groupes fondamentaux des groupes topologiques  $GL_n(\mathbb{R})$  et  $GL_n(\mathbb{C})$  en utilisant la décomposition polaire. Voici un tableau donnant les résultats obtenus :

Espace topologique	Décomposition polaire
$GL_n(\mathbb{R})$	$GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$
$GL_n(\mathbb{C})$	$GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$
$SL_n(\mathbb{R})$	$SL_n(\mathbb{R}) \simeq SO_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n^2+n-2}{2}}$
$SL_n(\mathbb{C})$	$SL_n(\mathbb{C}) \simeq SU_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2-2}$
$Sp_n(\mathbb{R})$	$Sp_n(\mathbb{R}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$
$Sp_n(\mathbb{C})$	$Sp_n(\mathbb{C}) \simeq Sp(n) \times \mathbb{R}^{4n^2}$
$O_n(\mathbb{C})$	$O_n(\mathbb{C}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$
$O_{p,q}(\mathbb{R})$	$O_{p,q}(\mathbb{R}) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$
$U_{p,q}(\mathbb{C})$	$U_{p,q}(\mathbb{C}) \simeq U_p(\mathbb{C}) \times U_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{(p+q)^2}$

Ainsi, pour pouvoir déterminer les groupes fondamentaux de ces groupes nous avons seulement besoin des groupes fondamentaux de  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $SO_n(\mathbb{R})$ ,  $U_n(\mathbb{C})$ ,  $SU_n(\mathbb{C})$ ,  $Sp(n)$  que nous avons déjà déterminé. Les voici regroupés dans un tableau :

Espace topologique	Groupe fondamental
$O_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}$
$SO_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}$
$O_n(\mathbb{R}), n \geq 3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$SO_n(\mathbb{R}), n \geq 3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$U_n(\mathbb{C}), n \geq 1$	$\mathbb{Z}$
$SU_n(\mathbb{C}), n \geq 1$	$\{1\}$
$Sp(n)$	$\{1\}$

## 1.3 Quelques exemples illustratifs

Voici à présent quelques exemples plus visuels de calculs de groupes fondamentaux.

### 1.3.1 Le tore

Nous savons que le tore  $\mathbb{T}^2$  est défini comme le produit  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Par conséquent, d'après la proposition 1.2.1,  $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Ce groupe fondamental admet donc deux générateurs. Les lacets  $c$  et  $c'$  qui engendrent le groupe fondamental sont assez simples à visualiser sur le dessin ci-dessous :

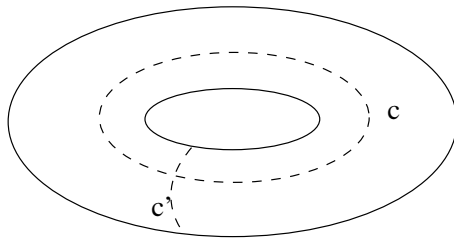
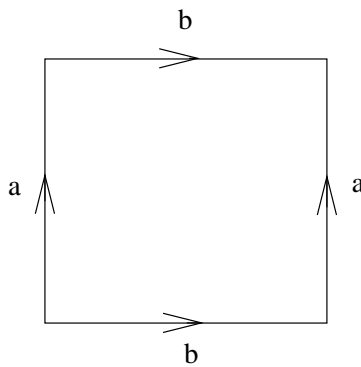


Figure 1.2: Les lacets  $c$  et  $c'$  engendrent  $\pi_1(\mathbb{T}^2)$

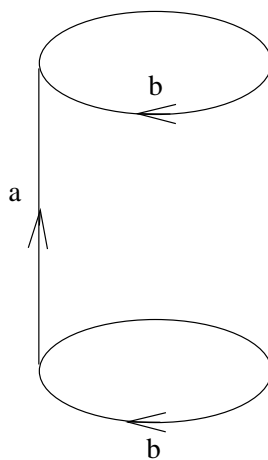
Ce groupe a pour présentation :  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ .

On peut retrouver ce résultat de la façon suivante :

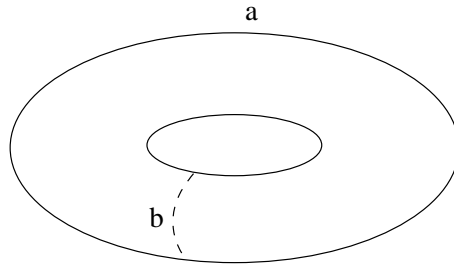
Le groupe de présentation  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$  peut être représenté par le dessin ci-dessous :



Si l'on “recolle” les deux côtés du carré correspondant au générateur  $a$  (c'est possible car les deux flèches se superposent), on obtient alors le cylindre suivant :

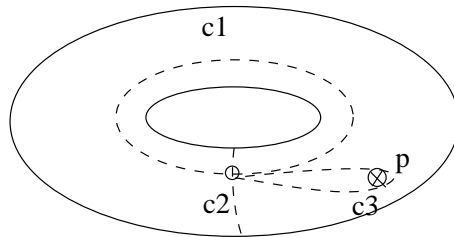


Enfin, si l'on "recolle" les deux cercles correspondant au générateur  $b$  (ici encore les flèches se superposent), on retrouve alors le tore  $\mathbb{T}^2$ .



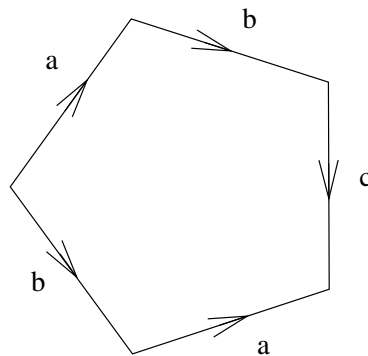
Voyons à présent un exemple où le calcul du groupe fondamental peut paraître moins évident : le tore épointé.

Comme nous l'avons fait précédemment, nous pouvons visualiser sur une figure que le tore privé d'un point  $p$  admet (au moins) 3 lacets distincts (de base un point donné) que l'on nomme  $c1, c2, c3$  :



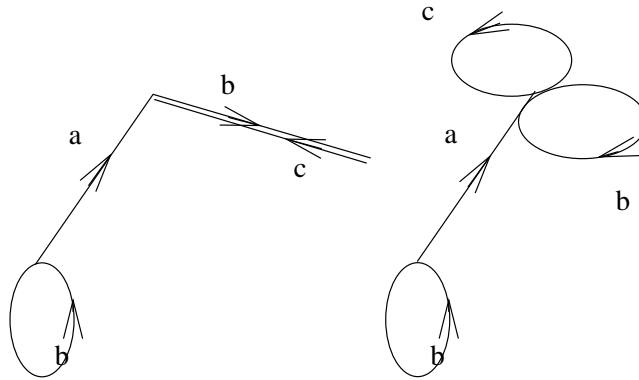
Ceci nous permet de supposer que le groupe fondamental du tore épointé est engendré par 3 éléments. Quelle(s) relation(s) existe-t-il entre ces éléments? Nous allons vérifier, par une méthode analogue à celle utilisée pour construire le tore, que le groupe fondamental du tore épointé a pour présentation :  $\langle a, b, c \mid [a, b]c = 1 \rangle$  où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .

Ce groupe peut en effet être représenté par le dessin suivant :

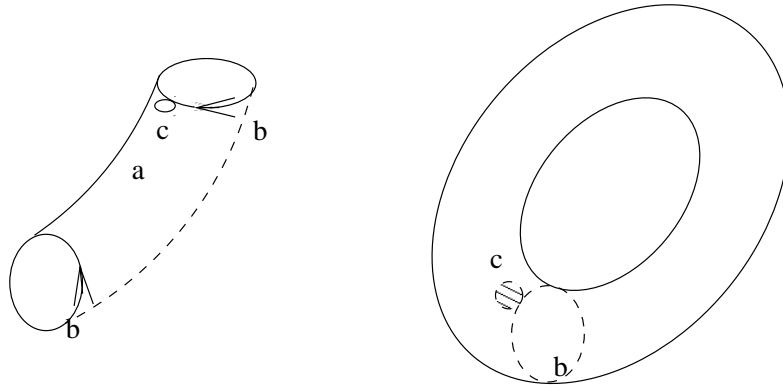




On peut recoller les arêtes  $a$  entre elles. Une telle manipulation a pour effet de déformer l'une des arêtes  $b$  en un cercle, et de superposer deux arêtes  $b$  et  $c$ . Puis on transforme ces deux arêtes en des cercles en les "tordant dans le même sens". On obtient successivement les figures suivantes :



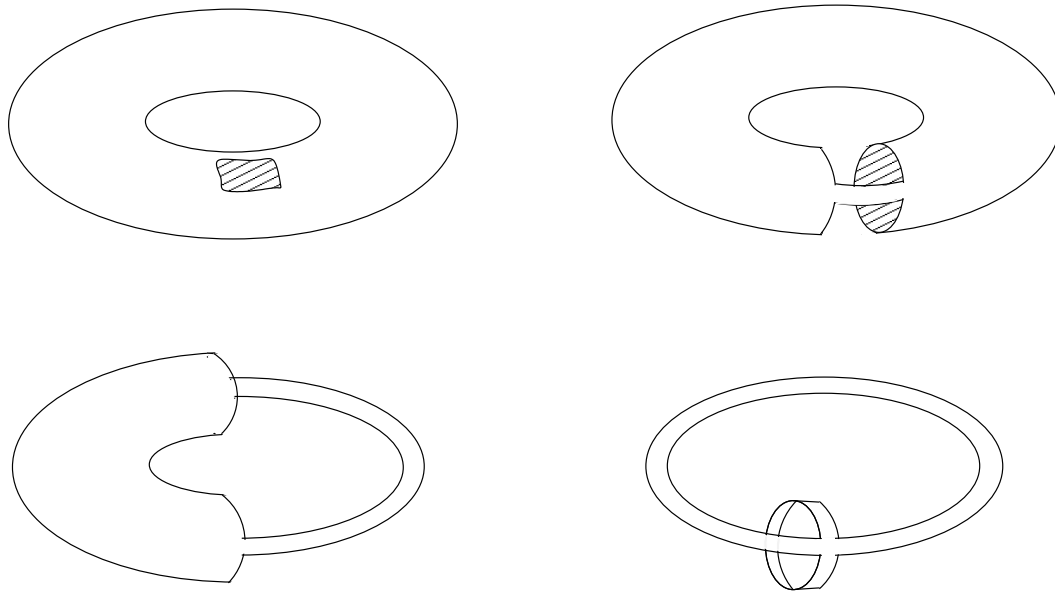
Par la suite, on peut "réduire le cercle  $c$  à un point" et "étirer l'arête  $a$ ", de façon à obtenir une surface dont les contours sont indiqués en pointillés (ces manipulations ne changeront pas le groupe fondamental de l'objet, car la figure initiale est alors un rétracte par déformation de la figure finale) Enfin, en joignant les deux cercles  $b$ , on retrouve bien le tore époincé.



le groupe fondamental de cet objet est donc  $\pi_1(X) \simeq G$  où  $G$  est le groupe de présentation  $\langle a, b, c \mid [a, b]c = 1 \rangle$  où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  (qui est aussi le groupe libre engendré par deux éléments :  $F_{\{a,b\}}$ ).

On peut le visualiser d'une autre manière : Le tore époincé peut être vu comme un tore percé d'un trou. Ce trou peut être agrandi et déformé (la figure obtenu sera un rétracte par déformation de la figure initiale), sans que cela ne modifie le groupe fondamental de la surface. Plus précisément on agrandit le trou jusqu'à obtenir une réunion de deux anneaux, par le procédé

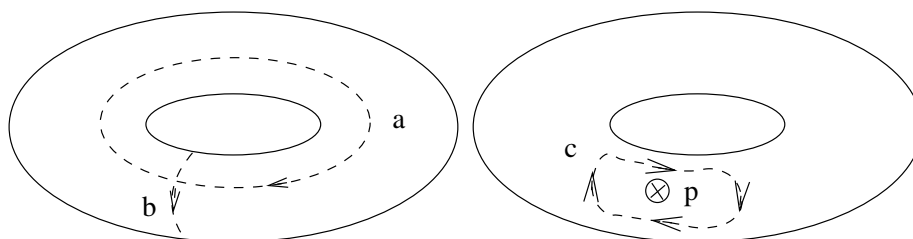
suivant :



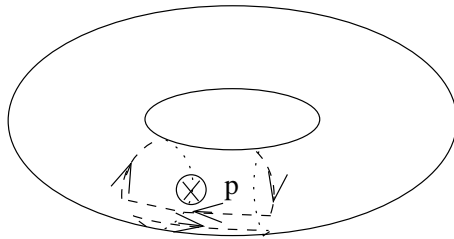
Chaque anneau peut être réduit à un cercle. Tout revient donc à calculer le groupe fondamental de deux cercles ( de groupe fondamental  $\mathbb{Z}$ ) reliés entre eux par un point (simplement connexe). Donc, d'après le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental du tore épointé est le produit libre  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire, le groupe libre engendré par deux éléments  $F_{\{a,b\}}$ .

Voici, une troisième méthode pour retrouver le groupe fondamental du tore épointé :

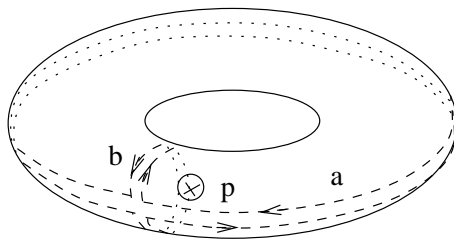
Considérons  $a$  et  $b$  et  $c$  les lacets suivants :



On peut déformer le lacet  $c$  en le faisant tourner autour du tore dans le sens inverse de  $b$  :



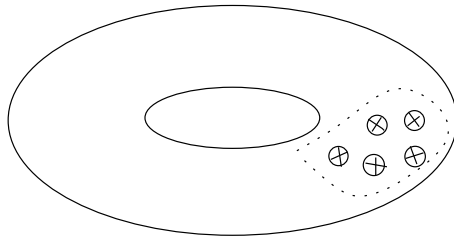
On le déforme ensuite en le faisant tourner dans le sens inverse de  $a$ , et on obtient le lacet suivant :



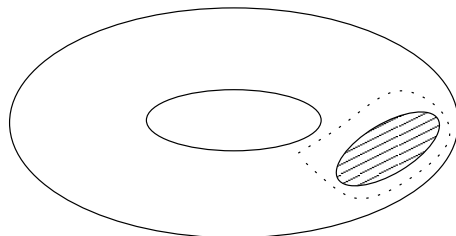
On remarque alors que le lacet obtenu est engendré par les lacets  $a$  et  $b$ . Plus précisément, c'est le lacet  $bab^{-1}a^{-1}$ . Mais c'est aussi le lacet  $c$  déformé, donc le même lacet à homotopie près.

On a donc la relation :  $c = bab^{-1}a^{-1}$ , et donc on retrouve bien  $[a, b]c = 1$

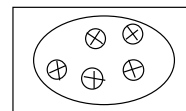
Essayons de généraliser pour le tore privé de  $n$  points :



On peut "découper" une partie du tore contenant les  $n$  trous. Le tore privé de  $n$  points est alors la réunion des deux espaces  $X_1$  et  $X_2$  ci-dessous :



X1

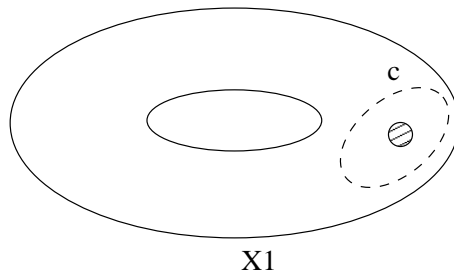


X2

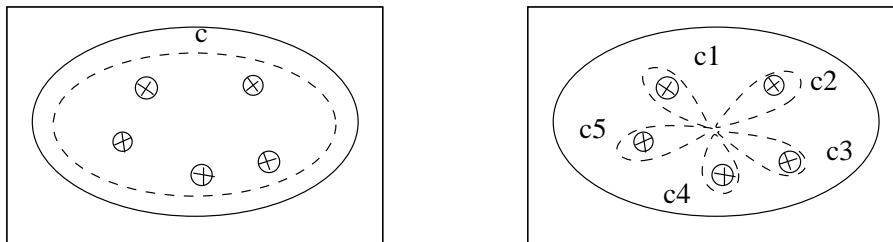
L'espace  $X_2$  est un plan privé de  $n$  points. Son groupe fondamental est alors le groupe libre engendré par  $n$  éléments  $c_1, \dots, c_n$ .

L'espace  $X_1$  est le tore privé d'un point (où l'on a "élargi" le trou). Son groupe fondamental est donc engendré par  $a, b, c$  avec pour relation  $[a, b]c = 1$ .

Le lacet  $c$  est représenté ci-dessous :



Mais c'est aussi un lacet de  $X_1 \cap X_2$ , donc ce lacet est homotope au lacet  $c$  sur  $X_2$ , qui est homotope au lacet  $c_1 c_2 \dots c_n$ . (d'après le théorème de Van Kampen) Comme le montre le dessin ci-dessous :



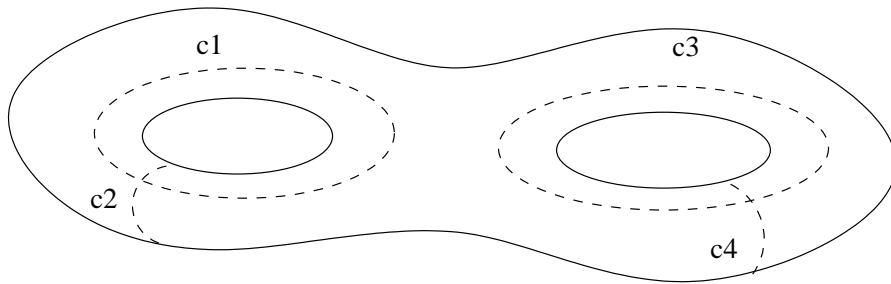
Ainsi, par le théorème de Van Kampen, on conclut que le groupe fondamental du tore privé de  $n$  points est :

$$\langle a, b, c_1, c_2, \dots, c_n \mid [a, b]c_1 c_2 \dots c_n = 1 \rangle$$

Nous allons à présent analyser le cas d'une surface de genre 2, et nous comparerons alors les résultats obtenus avec ceux du tore.

### 1.3.2 Une surface de genre 2

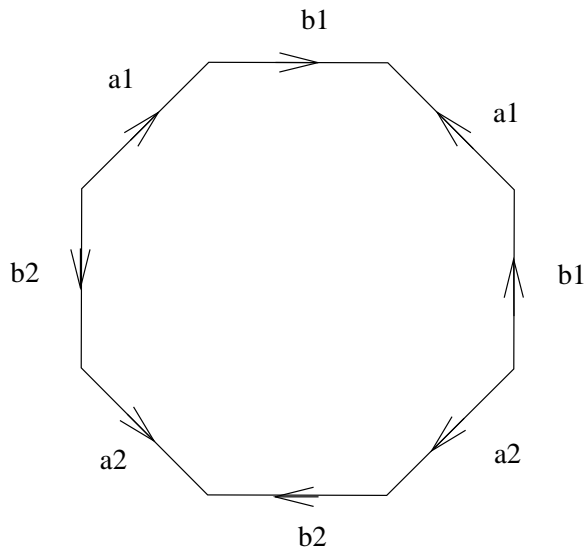
Comme nous l'avons fait pour le tore, nous pouvons remarquer qu'une surface de genre 2 admet (au moins) 4 type de lacets distincts  $c_1, c_2, c_3, c_4$  représentés en pointillés sur la figure ci-dessous :



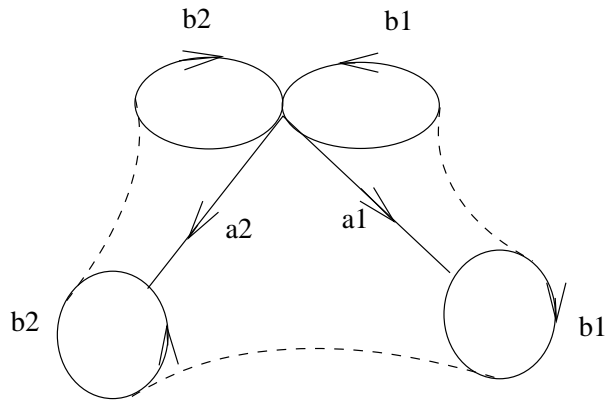
C'est pourquoi on peut supposer que le groupe fondamental d'une surface de genre 2 admet 4 générateurs  $a_1, b_1, a_2, b_2$ .

On montre alors qu'une surface de genre 2 a un groupe fondamental de présentation :  $\langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] = 1 \rangle$  où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .

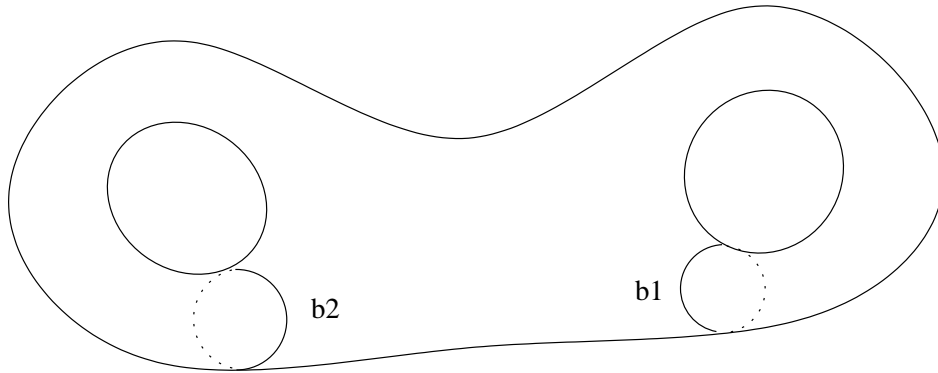
Un tel groupe peut être représenté ainsi :



En superposant les arêtes  $a_1$  et les arêtes  $a_2$ , et en transformant les arêtes  $b_1$  et  $b_2$  en cercles (comme nous l'avons fait pour le tore épointé), on obtient le dessin ci-dessous :

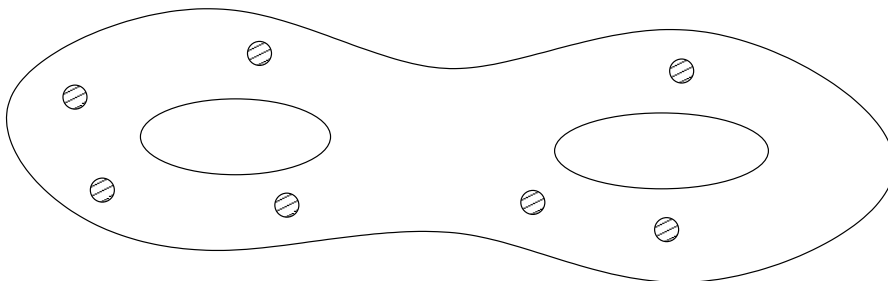


Et finalement, en recollant les cercles  $b_1$  et  $b_2$  entre eux, on retrouve bien une surface de genre 2.



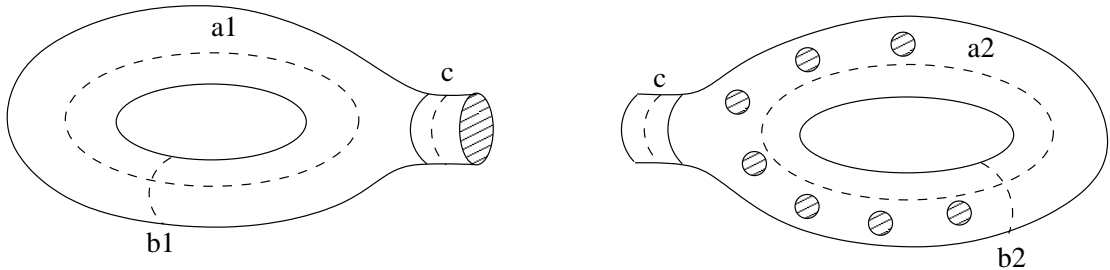
Une autre manière de retrouver le groupe fondamental d'une surface de genre 2 est d'utiliser le théorème de Van Kampen, en coupant la surface en deux tores privés d'un point.

Nous allons développer cette méthode dans le cas un peu plus général d'une surface de genre 2 privée de  $n$  points :



On commence par ramener tous les trous du même côté de la surface (c'est possible par déformation). Puis, on coupe la surface en deux parties, comme

sur le dessin ci-dessous :



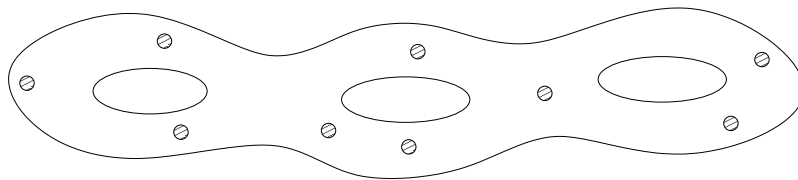
On obtient alors à gauche un tore privé d'un point dont le groupe fondamental est engendré par les lacets  $a_1, b_1$  et  $c$ , avec pour relation  $[a_1, b_1]c = 1$ .

A droite on obtient un tore privé de  $n + 1$  points dont le groupe fondamental est engendré par les lacets  $a_2, b_2$ , le lacet  $c'$ , et par  $n$  autres lacets  $c_1, \dots, c_n$  (un lacet pour chaque point que l'on avait retiré initialement à la surface de genre 2), avec pour relation  $[a_2, b_2]c'c_1 \dots c_n = 1$ , donc  $c' = [a_2, b_2]^{-1}c_n^{-1} \dots c_1^{-1} = [b_2, a_2]c_n^{-1} \dots c_1^{-1}$

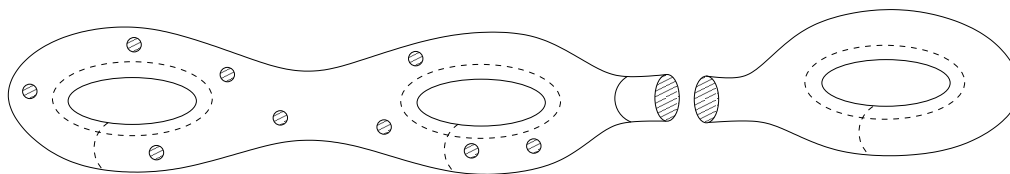
Par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de la surface de genre 2 privée de  $n$  points est alors le produit libre des groupes  $\langle a_1, b_1, c \mid [a_1, b_1]c = 1 \rangle$  et  $\langle a_2, b_2, c', c_1, c_2, \dots, c_n \mid c' = [a_2, b_2]^{-1}c_n^{-1} \dots c_1^{-1} \rangle$ , quotienté par la relation  $c = c'$  (en effet,  $c$  et  $c'$  sont les mêmes lacets sur l'intersection des deux surfaces, donc ce sont les mêmes sur la surface de genre 2 d'après le théorème de Van Kampen).

On obtient le groupe  $\langle a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2, \dots, c_n \mid [a_1, b_1][b_2, a_2]^{-1}c_n^{-1} \dots c_1^{-1} = 1 \rangle$ , que l'on peut encore écrire, quitte à changer les notations :  $\langle a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2, \dots, c_n \mid [a_1, b_1][a_2, b_2]c_1 \dots c_n = 1 \rangle$ .

On calculerai de même le groupe fondamental d'une surface de genre 3 privée de  $n$  points :



Il suffit pour cela de ramener tous les trous au milieu, puis de découper la figure comme ci-dessous, et il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Van Kampen.



On trouve alors pour groupe fondamental  $\langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, c_1, c_2, \dots, c_n \mid [a_1, b_1][a_2, b_2][a_3, b_3]c_1 \dots c_n = 1 \rangle$ .

On peut généraliser tout ceci en montrant par récurrence sur  $g$  que le groupe fondamental d'une surface de genre  $g$  est  $\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle$ , et que le groupe fondamental d'une surface de genre  $g$  privée de  $n$  points a pour groupe fondamental  $\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_n \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g]c_1 \dots c_n = 1 \rangle$ .

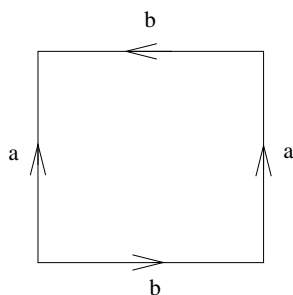
Voyons à présent un dernier exemple : la bouteille de Klein.

### 1.3.3 La bouteille de Klein

Le groupe fondamental de la bouteille de Klein est le groupe de présentation :  $\langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$ .

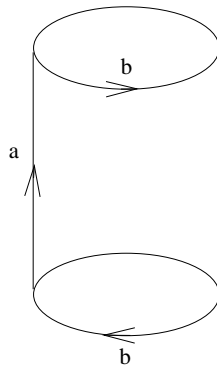
Voici pour nous en convaincre :

Le groupe  $\langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$  peut être représenté par le dessin suivant :

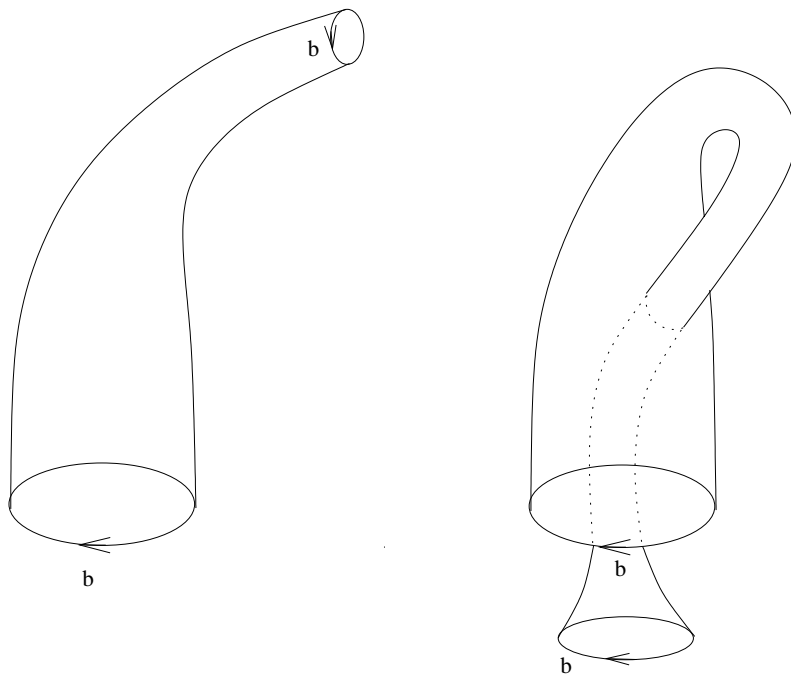


Comme nous l'avons fait dans le cas du tore, nous pouvons recoller les arêtes  $a$  entre elles, pour obtenir le cylindre suivant :

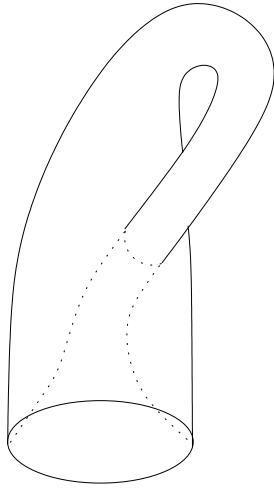




Par la suite, on peut déformer la figure de la façon suivante :



Et finalement, en recollant les deux cercles  $b$ , on retrouve bien la bouteille de Klein.



b

# Chapitre 2

## Revêtements

### 2.1 Définitions et constructions des revêtements

**Définition 2.1.1.** Soit  $B$  un espace topologique. Un **revêtement** de  $B$  est la donnée d'un espace topologique  $E$  et d'une application continue  $p : E \rightarrow B$  tels que :

Pour tout  $b \in B$ , il existe un voisinage  $V$  de  $b$ , un espace discret non vide  $F$ , et un homéomorphisme  $\Phi : p^{-1}(V) \rightarrow V \times F$  tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif (où  $p_1 : V \times F \rightarrow V$  est l'application :  $(y, f) \mapsto y$ ) :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) & \xrightarrow{\Phi} & V \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & V \end{array}$$

On dit alors que :

- $p : E \rightarrow B$  (ou parfois  $E$ ) est un revêtement de  $B$ ,
- $B$  est la **base** du revêtement,
- $E$  est l'**espace total**,
- $p$  est la **projection** (c'est une application nécessairement surjective),
- $p^{-1}(b)$  est la **fibres** au-dessus du point  $b$  de  $B$ ,
- $V$  est un **voisinage distingué** de  $b$ ,
- $\Phi$  est une **trivialisation** de  $p$  au-dessus de  $V$ .

Par ailleurs, on dit que le revêtement  $p : E \rightarrow B$  est connexe (resp. compact, simplement connexe,...) si l'espace total  $E$  est connexe (resp. compact, simplement connexe,...).

**Exemple 2.1.1.** Un premier exemple très simple de revêtement est l'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \lambda x$  où  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  (C'est un homéomorphisme).

Un autre exemple est le revêtement de  $\mathbb{C}^*$  donné par  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^{2i\pi z}$ , qui induit même un revêtement de  $\mathbb{S}^1 : f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Un troisième exemple est la projection  $p : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^m\mathbb{R}$ , pour  $m \geq 2$  qui est un revêtement de  $\mathbb{P}^m\mathbb{R} \simeq \mathbb{S}^m / \{-1, +1\}$ .

On dit qu'un revêtement  $p : E \rightarrow B$  est trivial lorsqu'il existe une trivialisations de  $p$  au-dessus de  $B$  tout entier.

**Définition 2.1.2.** Soient  $E$  et  $B$  deux espaces topologiques. Soit  $p : E \rightarrow B$  une application continue. Une **section** de  $p$  au-dessus d'un sous espace  $A$  de  $B$  est une application continue  $s : A \rightarrow E$  telle que  $p \circ s = Id_A$ .

Voici à présent une proposition caractérisant les revêtements d'un espace  $B$  au moyen de sections au dessus des voisinages distingués :

**Proposition 2.1.1.** Soit  $B$  un espace topologique. Une application continue  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement si et seulement si pour tout  $b \in B$ , il existe un voisinage  $V$  de  $b$  et une famille non vide  $s_i(V)$  de sections de  $p$  au-dessus de  $V$  satisfaisant les propriétés suivantes :

1. pour tout  $i \in I$ ,  $s_i(V)$  est un ouvert de  $p^{-1}(V)$ ,
2.  $s_i(V) \cap s_j(V) = \emptyset$ ,
3.  $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} s_i(V)$ .

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VII.2.2.

**Théorème 2.1.2.** Si  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement, et si  $B$  est connexe, alors toutes les fibres  $p^{-1}(b)$  ont même cardinal. Si ce cardinal est un entier  $m$ , on dit que  $E$  est un revêtement à  $m$  **feuilles** de  $B$ .

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VII.2.3.

Nous allons à présent considérer le cas où des groupes discrets agissent sur des espaces topologiques. Nous verrons alors que ces actions nous permettront d'exhiber des revêtements d'espaces homogènes.

**Définition 2.1.3.** Soit  $G$  un groupe topologique discret opérant sur un espace topologique  $X$ . On dit que l'action est :

- **libre** si pour tout  $x \in X$ ,  $G_x = \text{Stab}_G(x) = \{e\}$ .
- **propre** si pour tout compact  $K$  de  $X$ , l'ensemble  $G_K = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$  est relativement compact dans  $G$  (cette condition est toujours satisfaite lorsque  $G$  est compact, ou lorsque  $G$  est discret et  $G_K$  fini pour tout compact  $K$  de  $X$ ).

**Théorème 2.1.3.** Soit  $G$  un groupe discret opérant proprement et librement sur un espace localement compact  $E$ , et soit  $p$  la projection de  $E$  sur l'espace  $E/G$  des orbites de  $G$ . L'application  $p : E \rightarrow E/G$  est alors un revêtement.

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VII.3.1.

Ce théorème nous permet de donner quelques exemples de revêtements non triviaux :

**Exemple 2.1.2.** • Si l'on considère l'action naturelle de  $\mathbb{Z}^m$  sur  $\mathbb{R}^m$ , la projection  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$  est un revêtement du tore  $\mathbb{T}^m \simeq \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ .

- Si l'on note  $\mathbb{U} \subset \mathbb{S}^1$  le groupe des racines  $n$ -èmes de l'unité agissant naturellement sur  $\mathbb{S}^1$ , la projection  $p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1/\mathbb{U}$  est alors un revêtement. Par ailleurs, l'application  $h : \mathbb{S}^1/\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $[z] \mapsto z^n$  est bien définie et c'est un homéomorphisme. L'application  $q_n := h \circ p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $z \mapsto z^n$  est donc un revêtement. Nous verrons à la fin de la section 3.1 que tous les revêtements connexes de  $\mathbb{S}^1$  sont ou bien de cette forme, ou bien le revêtement  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$  défini précédemment.
- L'homéomorphisme  $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^m/\{-1, +1\}$  nous donne un revêtement  $p : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ .

Nous sommes donc en mesure d'exhiber des revêtements connexes de certains espaces topologiques, mais pouvons-nous les trouver tous? Comment classifier les revêtements connexes d'un espace topologique donné? La réponse à cette question sera donnée par le théorème 3.1.12.

Pour le cercle, il est assez naturel de penser que les seuls revêtements sont donnés par le cercle lui-même et par les droites du plan. Cela devient moins évident en revanche si l'on demande de classifier les revêtements connexes d'un objet tel que la bouteille de Klein. Nous serons pourtant en mesure de le faire grâce au théorème 3.1.12.

Voici à présent une proposition généralisant le théorème 2.1.3 dans le cas où l'espace topologique  $E$  considéré est localement connexe et localement compact :

**Proposition 2.1.4.** *Soit  $G$  un groupe discret opérant proprement et librement sur un espace  $E$  localement connexe et localement compact, et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . La projection canonique  $q : E/H \rightarrow E/G$  est alors un revêtement.*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VII.3.4.

À présent que nous avons une idée de ce qu'est un revêtement, nous allons introduire la notion de morphisme de revêtement :

**Définition 2.1.4.** *Soit  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B'$  deux revêtements. Un **morphisme** du revêtement  $E$  dans le revêtement  $E'$  est un couple  $(H, h)$  d'applications continues  $H : E \rightarrow E'$  et  $h : B \rightarrow B'$  telles que  $p' \circ H = h \circ p$ . Autrement dit, le diagramme ci-dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

*On dit aussi que  $H : E \rightarrow E'$  est un morphisme au-dessus de  $h$ , et plus simplement un morphisme lorsque  $B = B'$  et  $h = Id_B$ .*

Voici un premier exemple de morphisme de revêtement :

**Exemple 2.1.3.** Considérons les revêtements  $q_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $z \mapsto z^n$  vus précédemment. Soient  $n, m, r, s \in \mathbb{N}^*$  tels que  $nr = ms$ . Le couple  $(q_r, q_s)$  est alors un morphisme du revêtement  $q_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dans le revêtement  $q_m : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ . On a en effet  $q_r \circ q_n(z) = z^{nr} = z^{ms} = q_m \circ q_s(z)$ .

**Définition 2.1.5.** Soit  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B$  deux revêtements. Soit  $(H, h)$  un morphisme de  $E$  dans  $E'$ .

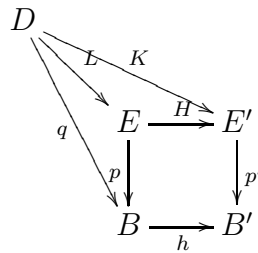
On dit que  $(H, h)$  est un **isomorphisme** de revêtements lorsque  $H$  et  $h$  sont des homéomorphismes (le couple  $(H^{-1}, h^{-1})$  est alors un isomorphisme de  $E'$  sur  $E$ ).

**Théorème 2.1.5.** Soit  $p' : E' \rightarrow B'$  un revêtement, et soit  $h$  une application continue d'un espace  $B$  dans  $B'$ . Il existe un revêtement  $p : E \rightarrow B$  et une application continue  $H : E \rightarrow E'$  ayant les propriétés suivantes :

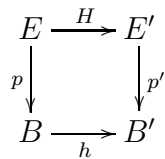
- $(H, h)$  est un morphisme de revêtements,
- si  $q : D \rightarrow B$  est un revêtement de  $B$ , et si  $K$  est un morphisme de revêtements de  $D$  dans  $E'$  au-dessus de  $h$ , il existe un unique morphisme de revêtements  $L : D \rightarrow E$  tel que  $K = H \circ L$ .

De plus le revêtement  $E$  est alors unique à isomorphisme près. On l'appelle le **revêtement image réciproque** de  $E'$  par  $h$ , et on le note souvent  $h^*E'$ .

Ce théorème signifie que le diagramme suivant est commutatif :



*Démonstration (de l'existence de  $E, p, H$ ).* On cherche à déterminer un espace  $E$  et des applications continues  $p$  et  $H$  telles que le diagramme suivant commute :



On construit alors  $E$  à partir de  $B$ ,  $E'$ ,  $h$  et  $p'$  : On pose alors  $E = \{(b, x') \in B \times E' \mid h(b) = p'(x')\}$ . Puis, on définit  $p : E \rightarrow B$  comme la projection  $(b, x') \mapsto b$ , et  $H : E \rightarrow E'$  comme la projection  $(b, x') \mapsto x'$ . On a alors  $p' \circ H(b, x') = p'(x') = h(b) = h \circ p(b, x')$ .

On montre ensuite que  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement : soit  $b \in B$ , on note  $b' = h(b) \in B'$ . Puisque  $p' : E' \rightarrow B'$  est un revêtement, il existe un voisinage distingué  $V'$  de  $b'$ , un espace discret  $F$ , et une trivialisatoin de  $p'$  au-dessus de  $V'$ , notée  $\Phi' : p'^{-1}(V') \rightarrow V' \times F$ . Notons  $p_2 : V' \times F \rightarrow F$  la projection sur  $F$ .

Soit alors  $V := h^{-1}(V')$ , et  $\Phi : V \subset B \times E' \rightarrow V \times F$ ,  $(a, x') \mapsto (a, p_2(\Phi'(x')))$ .  $\Phi$  est alors une trivialisatoin de  $p$  au-dessus de  $V$ .  $p : E \rightarrow B$  est donc bien un revêtement.

Enfin, si l'on considère  $q : D \rightarrow B$  un autre revêtement de  $B$ . et  $K : D \rightarrow E'$  un morphisme de revêtements, on vérifie que  $L : D \rightarrow E$ ,  $x \mapsto (q(x), K(x))$  est le seul morphisme de revêtements tel que  $K = H \circ L$ .

□

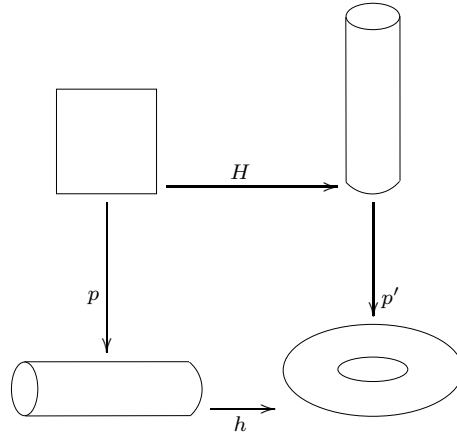
Voici quelques exemples de construction de revêtement image réciproque :

**Exemple 2.1.4.** 1. Prenons  $B' = \mathbb{R}$ ,  $E' = \mathbb{R}$ ,  $p' : x \mapsto \lambda x$  où  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $B = \mathbb{R}^2$  et  $h : (x, y) \mapsto x$ .

Le revêtement image réciproque est alors  $h^*E' = \{(x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid x = \lambda z\}$ .  $h^*E'$  est donc le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x = \lambda z$ .

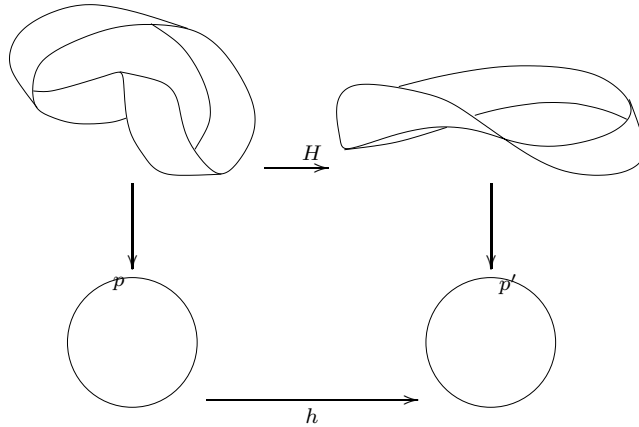
2. Un exemple moins trivial de revêtement image réciproque est le cas où  $B'$  est le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,  $B$  le cylindre  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ , et  $E'$  le cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , avec  $p' : (x, \theta) \mapsto (x, e^{2i\pi\theta})$  et  $h : (\theta', y) \mapsto (e^{2i\pi\theta'}, y)$ . Le revêtement image réciproque de  $E'$  est le plan  $\mathbb{R}^2$  :





En effet,  $E = \{((\theta', y), (x, \theta)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \mid x = e^{2i\pi\theta'}, y = e^{2i\pi\theta}\} = \{((\theta', e^{2i\pi\theta}), (e^{2i\pi\theta'}, \theta)) \mid \theta, \theta' \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2$

3. Considérons le cas où  $B' = \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et  $B = \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ ,  $h : z \rightarrow z^2$  et où  $E'$  est la bande de Moebius, c'est-à-dire l'ensemble  $[0, 1] \times [0, 1]$  où l'on identifie les points  $(0, y)$  et  $(1, 1 - y)$ . Un revêtement du cercle est alors donné par  $p' : E' \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $[(x, y)] \mapsto e^{2i\pi x}$ . Le revêtement image réciproque de  $E'$  est alors "la bande de Moebius tordue deux fois" :



Nous allons à présent introduire la notion d'automorphisme de revêtements:

**Définition 2.1.6.** Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement. Un **automorphisme** du revêtement  $E$  est un isomorphisme  $H$  de  $E$  dans lui-même.

Dans ce qui va suivre, nous noterons  $Aut(E)$  l'ensemble des automorphismes d'un revêtement  $E$ .

Cet ensemble est muni de la composition des applications continues est alors un groupe.

Ce groupe  $\text{Aut}(E)$  agit alors continûment sur chaque fibre  $p^{-1}(b)$  de  $E$ .

Voici un théorème utile :

**Théorème 2.1.6.** *Soient  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B'$  deux revêtements et  $h : B \rightarrow B'$  une application continue. Si  $E$  est connexe, deux morphismes de  $E$  dans  $E'$  au-dessus de  $h$  qui coïncident en un point sont égaux.*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VII.6.4.

Ce théorème permet en particulier d'établir le résultat suivant qui permet de déterminer le groupe des automorphismes de certains revêtements.

**Corollaire 2.1.7.** *Soit  $G$  un groupe discret opérant librement et proprement sur un espace topologique  $E$  connexe et localement compact. Le groupe des automorphismes du revêtement  $p : E \rightarrow E/G$  est alors isomorphe à  $G$ .*

*Démonstration.* Voir [G] Chapitre VII.6.6.

La définition de ce groupes des automorphismes va alors nous permettre d'introduire les revêtements galoisiens :

## 2.2 Revêtements galoisiens

**Définition 2.2.1.** *Un revêtement  $p : E \rightarrow B$  est dit **galoisien** si :*

- $E$  est connexe,
- $\text{Aut}(E)$  agit transitivement sur chaque fibre  $p^{-1}(b)$ , où  $b \in B$ .

*On dit aussi que  $E$  est un **revêtement galoisien de groupe**  $G = \text{Aut}(E)$ .*

Lorsque  $E$  est un revêtement galoisien, on peut montrer que la projection  $\pi : E \rightarrow E/\text{Aut}(E)$  est un homéomorphisme.

**Remarque 2.2.1.** *Lorsque  $G$  est un groupe discret opérant proprement et librement sur un espace  $E$  connexe et localement compact, le revêtement  $p : E \rightarrow E/G$  est un revêtement galoisien de groupe  $G$ .*

D'après cette remarque, les revêtements de l'exemple 2.1.2 sont alors tous galoisiens.

Ce terme de revêtements galoisien n'est pas sans rapport avec la notion d'extensions galoisiennes dans la théorie de Galois. Nous verrons apparaître tout au long de ce chapitre certaines similitudes entre les résultats de la théorie des revêtements et ceux de la théorie de Galois. L'origine de ces similitudes sera d'ailleurs explicitée dans la partie 2.

Rappelons-nous que la théorie de Galois permet d'établir une correspondance entre les sous-extensions d'une extension galoisienne et les sous-groupes du groupe de Galois de cette extension. Qu'en est-il pour les revêtements galoisien ?

Nous allons introduire la notion de revêtement associé à un revêtement galoisien  $E$ ,

Considérons un revêtement galoisien de groupe  $G$ , et soit  $F$  un espace discret sur lequel  $G$  opère à gauche. On peut alors montrer que pour  $g \in G$ ,  $g : (x, f) \mapsto (gx, gf)$  est une action continue, libre et propre du groupe  $G$  sur l'espace  $E \times F$ . Par conséquent, d'après le théorème 2.1.3, la projection  $\pi_F : E \times F \rightarrow (E \times F)/G$  est un revêtement. Notons alors  $E_F = (E \times F)/G$ .

On construit une application  $p_F : E_F \rightarrow B$  une application continue telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{p_1} & E \\ \pi_F \downarrow & & \downarrow p \\ E_F & \xrightarrow{p_F} & B \end{array}$$

Cette application  $p_F$  est alors bien définie et unique. En effet, si  $(x, f) \in E \times F$ ,  $(x', f') = (gx, gf)$ , et posons  $b = p(x)$ . Puisque  $G$  agit sur la fibre au-dessus de  $b$ , on a  $p(x') = p(gx) = b$ . On a alors  $p \circ p_1(x', f') = p(x') = b = p(x) = p \circ p_1(x, f)$ . Donc, si  $[x, f]$  désigne l'orbite de  $(x, f)$ , l'application  $p_F : [x, f] \mapsto p \circ p_1(x, f)$  est bien définie, et elle est unique par construction.

On peut même démontrer que cette application est un revêtement. Il suffit pour cela de considérer un point  $b \in B$ ,  $x \in p^{-1}(b)$ ,  $V$  un voisinage distingué de  $b$  (pour le revêtement  $p : E \rightarrow B$ ) et  $s$  une section de  $p$  au-dessus de  $V$  telle que  $s(b) = x$ . On peut alors vérifier que la famille des  $\sigma_f : V \rightarrow E_F$ ,

$y \mapsto \pi_F(s(y), f)$ , pour  $f \in F$ , est une famille de sections vérifiant les hypothèses de la proposition 2.1.1.

**Définition 2.2.2.** *Le revêtement  $p_F : E_F \rightarrow B$  est appelé le **revêtement de fibre  $F$  associé** au revêtement galoisien  $p : E \rightarrow B$ .*

**Remarque 2.2.2.** *Un exemple de revêtement associé à un revêtement galoisien  $p : E \rightarrow B$  de groupe  $G$  est donné par  $p_{G/H} : E_{G/H} \rightarrow B$ , où  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .*

*De plus, ce revêtement est isomorphe au revêtement  $q_H : E/H \rightarrow B$ ,  $[x] \mapsto p(x)$  (qui est bien défini car  $G$ , donc  $H$  agit sur les fibres  $p^{-1}(\{p(x)\})$ ), via le morphisme  $h : E/H \rightarrow E_{G/H}$ ,  $[x] \mapsto [(x, H)]$ .*

On commence ici à remarquer une correspondance entre les sous-groupes de  $G$  et les revêtements associés. La proposition suivante établit cette correspondance :

**Proposition 2.2.1.** *Si  $E_F$  est un revêtement connexe associé à un revêtement galoisien  $E$ , alors  $E_F$  est isomorphe à un revêtement du type  $q_H : E/H \rightarrow B$ , où  $H$  est le stabilisateur d'un point de  $F$ .*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VIII.3.3.

Plus précisément, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.2.2.** *Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement galoisien de groupe  $G$ .*

1. *L'ensemble des classes d'isomorphismes de revêtement connexes associés à  $E$  est en bijection avec l'ensemble des classes de sous-groupes conjugués de  $G$ .*
2. *Un revêtement connexe associé à  $E$  est galoisien si et seulement s'il correspond à un sous-groupe normal de  $H$  de  $G$ . Son groupe d'automorphisme est alors isomorphe au groupe quotient  $G/H$ .*

Signalons que la bijection donnée en 1) est l'application  $[E/H] \mapsto [H]$  (de réciproque  $[H] \mapsto [E/H]$ ) où  $[E/H]$  est la classe d'isomorphisme du revêtement  $E/H$  (connexe) associé à  $E$  (pour plus de détails, voir [G].Chapitre

VIII.4.7). La proposition 2.2.1 assure que tout revêtement associé est bien isomorphe à un tel groupe.

Cette correspondance nous rappelle bien la correspondance de Galois entre les sous-extensions d'une extension galoisienne et les sous-groupes de son groupe de Galois.

Grâce à ce théorème, nous pouvons à présent déterminer les revêtements associés à un revêtement galoisien d'un espace  $B$  de groupe  $G$ , en déterminant les sous-groupes de  $G$ .

Ajoutons à cela une proposition parfois bien utile :

**Proposition 2.2.3.** *Si  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement galoisien de  $B$ , alors un revêtement connexe  $q : D \rightarrow B$  est isomorphe à un revêtement associé à  $E$  si et seulement s'il existe un morphisme de revêtements de  $E$  sur  $D$ .*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VIII.2.7.

Nous allons à présent introduire la définition d'un revêtement galoisien particulier : le revêtement universel.

**Définition 2.2.3.** *Un **revêtement universel** d'un espace  $B$  est un revêtement galoisien  $p : E \rightarrow B$  tel que tout revêtement de  $B$  soit isomorphe à un revêtement associé à  $E$ .*

Les revêtement universel sont particulièrement intéressants à étudier, étant donné que leurs revêtements connexes sont tous isomorphes à des revêtements connexes associés que nous pourrions identifier grâce au théorème 2.2.2. En somme, les revêtements universels d'un espace  $B$  sont des revêtements qui nous permettront de déterminer tous les revêtements connexes de  $B$ .

Cependant une question subsiste : comment déterminer le groupe d'un revêtement galoisien ?

La partie qui va suivre va répondre à ce problème : elle nous permettra de faire le lien entre le groupe d'un revêtement galoisien et les groupes fondamentaux des espaces topologiques considérés.

# Chapitre 3

## Revêtements et groupes fondamentaux

### 3.1 Groupes fondamentaux des revêtements

**Définition 3.1.1.** Soient  $p : E \rightarrow B$  et  $h : X \rightarrow B$  deux applications continues. Un **relèvement** de  $h$  est une application continue  $H : X \rightarrow E$  telle que  $p \circ H = h$ , c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow H & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Remarquons que cette définition correspond bien à la définition d'un relèvements des lacets dans  $\mathbb{S}^1$  donnée dans le lemme 1.2.7.

Lorsque  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement, les relèvements de  $h$  sont particulièrement intéressants à étudier. En effet on a la proposition suivante :

**Proposition 3.1.1.** Soient  $p : E \rightarrow B$  un revêtement et  $h : X \rightarrow B$  une application continue. Si  $X$  est connexe, deux relèvements de  $h$  qui coïncident en un point sont égaux.

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre VII.6.3.

**Proposition 3.1.2.** 1. Pour tout chemin  $c : I \rightarrow B$  d'origine  $b \in B$ , et pour tout point  $x \in p^{-1}(b)$ , il existe un unique relèvement  $\gamma : I \rightarrow E$  tel que  $\gamma(0) = x$ .

2. Soient  $c, c'$  deux chemins d'origine  $b \in B$  ayant même extrémité et soient  $\gamma, \gamma'$  leurs relèvements d'origine  $x \in p^{-1}(b)$ . Si  $c$  et  $c'$  sont homotopes,  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont même extrémité et sont homotopes.

*Démonstration.*

1. Si  $c : I \rightarrow B$  est un chemin d'origine  $b$ , l'unicité du relèvement  $\gamma$  tel que  $\gamma(0) = x$  est un corollaire immédiat de la proposition 3.1.1. La démonstration de l'existence d'un tel relèvement, utilise le lemme suivant :

**Lemme 3.1.3.** *Tout revêtement du segment  $I = [0, 1]$  est trivial.*

(Pour une démonstration de ce lemme, voir [G].Chapitre IX.2.1.)

Soit  $q : D \rightarrow I$  le revêtement image réciproque de  $E$  par  $c : I \rightarrow B$ , et soit  $C$  le morphisme de  $D$  dans  $E$  au-dessus de  $c$ . Le revêtement  $D$  est trivial d'après le lemme, donc il existe une section  $s$  de  $q$  au-dessus de  $I$  telle que  $s(0) = (0, x)$ . Le chemin  $\gamma = C \circ s$  est alors un relèvement de  $c$  tel que  $\gamma(0) = x$ .

2. La démonstration de la seconde assertion est analogue : voir [G].Chapitre IX.2.2.

□

Dans le cas particulier où les chemins  $c$  et  $c'$  sont des lacets de base  $b$ , nous pouvons reformuler cette proposition de la façon suivante :

La première assertion signifie que pour un lacet  $c$  sur  $B$  de base  $b$  donné on peut construire un unique chemin  $\gamma$  sur  $E$  d'origine  $x \in p^{-1}(b)$  fixée, tel que  $c = p \circ \gamma$ .

La deuxième assertion se traduit par le fait que si  $c$  et  $c'$  sont deux lacets ayant même classe d'homotopie ( $[c] = [c']$ ), alors les chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  construits ont même classe d'homotopie ( $[\gamma] = [\gamma']$ ). En particulier, si l'on se donne  $[\gamma]$  et  $[\gamma']$  deux classes d'homotopie de lacets sur  $E$  telles que  $p_*([\gamma]) = p_*([\gamma'])$  alors  $[\gamma] = [\gamma']$ .

On commence alors à entrevoir le lien entre le groupe fondamental de  $B$  et celui de son revêtement  $E$  :

**Théorème 3.1.4.** *Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement, et soient  $x \in E$  et  $b = p(x)$ . Le morphisme  $p_* : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$  est injectif.*

Voici un premier exemple simple pour illustrer ce théorème :

**Exemple 3.1.1.** *Nous savons qu'un revêtement du cercle  $\mathbb{S}^1$  est donné par  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . On remarque que  $\pi_1(\mathbb{R}) \simeq \{1\}$  s'injecte naturellement dans  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ .*

On peut se demander pour quels revêtements le morphisme  $p_*$  est un isomorphisme. La réponse est donnée par le lemme suivant (dans le cas où  $E$  est connexe par arcs) :

**Lemme 3.1.5.** *Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement connexe par arcs de  $B$ , et soit  $x \in E$  et  $b = p(x)$ . Le morphisme  $p_* : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$  est un isomorphisme si et seulement si  $p$  est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre IX.3.1.

Dans toute la suite de cette section nous allons supposer que  $B$  est un espace connexe et localement connexe par arcs.

**Proposition 3.1.6.** *Soient  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B$  deux revêtements connexes de  $B$ ,  $b \in B$ ,  $x \in p^{-1}(b)$ ,  $x' \in p'^{-1}(b)$ . Il existe un morphisme  $h$  de  $E$  dans  $E'$  tel que  $h(x) = x'$  si et seulement si  $p_*\pi_1(E, x) \subset p'_*\pi_1(E', x')$ . Ce morphisme est alors un isomorphisme si et seulement si  $p_*\pi_1(E, x) = p'_*\pi_1(E', x')$ .*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre IX.3.5.

On comprend que si l'on considère le cas particulier où  $E = E'$ , on voit apparaître une condition sur les groupes  $p_*\pi_1(E, x)$  et  $p'_*\pi_1(E', x')$  pour qu'il existe un automorphisme de  $E$  tel que  $x = x'$ . Ceci constitue donc une première approche du lien entre les groupes fondamentaux des revêtements et le groupe des automorphismes.

**Théorème 3.1.7.** *Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement connexe,  $x \in E$ ,  $b = p(x)$ , et soit  $N$  le normalisateur de  $p_*\pi_1(E, x)$  dans  $\pi_1(B, b)$ . Il existe un (unique) morphisme  $h$  de  $N$  sur le groupe  $\text{Aut}(E)$  des automorphismes de  $E$  ayant la propriété suivante :*

*si  $c$  est un lacet de base  $b$  dans  $B$  tel que  $[c] \in N$ , et si  $\gamma$  est le relèvement de  $c$ , d'origine  $x$  dans  $E$ , alors  $h([c])(x) = \gamma(1)$ .*



*Démonstration.* (de l'existence de  $h$ ) Posons  $y = \gamma(1)$  et soit  $[c] \in N$ . D'après la proposition 3.1.2,  $y$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $c$ , et on a par ailleurs :  $p_*\pi_1(E, y) = [c]^{-1}(p_*\pi_1(E, x))[c]$  (cf proposition 1.1.7) Or,  $[c]^{-1}(p_*\pi_1(E, x))[c] = p_*\pi_1(E, x)$  (car  $[c] \in N$ ) On a donc  $p_*\pi_1(E, y) = p_*\pi_1(E, x)$ , et donc, d'après la proposition 3.1.6, il existe un unique automorphisme  $h([c])$  de  $E$  tel que  $h([c]) = y$ .

Nous avons donc construit l'application  $h : N \rightarrow \text{Aut}(E)$ , et c'est bien un morphisme : en effet, si  $c, c'$  sont deux lacets de base  $b$  dans  $B$  tels que  $[c], [c'] \in N$ , et  $\gamma, \gamma'$  leurs relèvements d'origine  $x$ . On vérifie alors que  $\gamma(h([c])\gamma')$  est le relèvement de  $cc'$  d'origine  $x$ . On a alors  $h([c][c'])(x) = h([c]c')(x) = h([c])\gamma'(1) = h([c])h([c'])(x)$ .

Par conséquent, (par unicité de l'automorphisme de  $E$  transformant  $x$  en  $\gamma(h([c])\gamma')(1)$ ) on a  $h([c][c']) = h([c])h([c'])$ .

$h$  est donc bien un morphisme.

□

**Remarque 3.1.1.** *On peut remarquer que le noyau du morphisme  $h$  est  $p_*\pi_1(E, x)$ . De plus, il est facile de voir que  $h$  est surjectif : en effet, si  $k$  est un automorphisme de  $E$ , il existe un chemin  $\gamma$  joignant  $x$  à  $k(x)$  dans  $E$ , et on vérifie alors que  $k = h([p \circ \gamma])$  et  $[p \circ \gamma] \in N$ . (Pour plus de détails voir [G]. Chapitre IX.4.1.)*

On comprend alors que si  $E$  est un revêtement connexe de  $B$ , et si  $p_*\pi_1(E, x)$  est distingué dans  $\pi_1(B, b)$  pour tout  $b \in B$  et  $x \in p^{-1}(b)$ , alors  $N = \pi_1(B, b)$ , et donc  $h$  induit un isomorphisme de groupes de  $\pi_1(B, b)/p_*\pi_1(E, x)$  sur  $\text{Aut}(E)$ . Or pour tous  $x, y \in p^{-1}(b)$ , on considère un lacet  $[c]$  dont le relèvement admet  $x$  et  $y$  pour extrémités, et on a dans ce cas :  $h([c])(x) = y$ , donc  $\text{Aut}(E)$  agit transitivement sur chaque fibre  $p^{-1}(b)$ . Le revêtement  $E$  est donc galoisien.

Ainsi, si  $E$  est connexe et  $p_*\pi_1(E, x)$  est distingué dans  $\pi_1(B, b)$ , alors  $E$  est galoisien. La réciproque est vraie et facile à vérifier (cf [G]. Chapitre IX.4.3).

Le théorème suivant résume tout ceci :

**Théorème 3.1.8.** *Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement connexe.*

*$E$  est un revêtement galoisien si et seulement si pour tout  $b \in B$  et tout  $x \in p^{-1}(b)$ ,  $p_*\pi_1(E, x)$  est distingué dans  $\pi_1(B, b)$ .*

*Si c'est le cas, on a alors l'isomorphisme  $\text{Aut}(E) \simeq \pi_1(B, b)/p_*\pi_1(E, x)$ .*

*Démonstration.* Voir [G].Chapitre IX.4.3.

Ainsi d'une part ce théorème nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un revêtement connexe soit galoisien (il existe d'ailleurs une condition analogue pour qu'une sous-extension d'une extension galoisienne soit galoisienne, nous la rappellerons dans la section suivante), et d'autre part, elle nous donne un moyen d'identifier le groupe d'un revêtement galoisien en considérant les groupes fondamentaux des espaces  $E$  et  $B$ .

C'est plus simple encore dans le cas où  $E$  est simplement connexe, car alors, on a le corollaire immédiat suivant :

**Corollaire 3.1.9.** *Si  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement connexe, et si  $E$  est simplement connexe, alors  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement galoisien de groupe  $G$  isomorphe à  $\pi_1(B, b)$ .*

En particulier, si  $G$  est un groupe discret agissant proprement et librement sur un espace  $E$  localement compact, localement connexe par arcs et simplement connexe, alors on en déduit que le groupe fondamental de  $E/G$  est isomorphe à  $G$ . On peut alors se servir de cette propriété pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique donné. Voici quelques exemples:

**Exemple 3.1.2.** 1. *Le revêtement du tore  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m \simeq \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$  nous donne  $\pi_1(\mathbb{T}^m) \simeq \mathbb{Z}^m$ .*

2.  *$p : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^m\mathbb{R}$  est un revêtement simplement connexe pour  $m \geq 2$ . Par conséquent on retrouve l'isomorphisme annoncé à la fin de la section 1.2.4 à savoir  $\pi_1(\mathbb{P}^m\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  pour  $m \geq 2$ .*

3. *Le groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  agit (proprement et librement) sur la sphère  $\mathbb{S}^{2m+1}$  par  $\bar{k} \cdot (z_1, \dots, z_{m+1}) = (\zeta^k z_1, \dots, \zeta^k z_{m+1})$ , où la sphère  $\mathbb{S}^{2m+1}$  est considérée comme l'ensemble des éléments de  $\mathbb{C}^{m+1}$  de norme 1, et  $\zeta$  est une racine primitive  $n^{\text{ème}}$  de l'unité. Si on note  $L_n^{2m+1} := \mathbb{S}^{2m+1}/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  l'espace lenticulaire de dimension  $2m+1$  et de groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  le revêtement  $p : \mathbb{S}^{2m+1} \rightarrow L_n^{2m+1}$  est simplement connexe, et donc  $\pi_1(L_n^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .*

**Remarque 3.1.2.** *L'intérêt de ceci est qu'à présent, nous sommes en mesure de déterminer un espace topologique ayant pour groupe fondamental un groupe abélien de type fini  $G$  donné. En effet, nous savons qu'un tel groupe peut s'écrire sous la forme  $G \simeq \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ .*

*On sait que le groupe fondamental du tore  $\mathbb{T}^m$  de dimension  $m$  (produit de  $m$  exemplaires du cercle  $\mathbb{S}^1$ )  $\pi_1(\mathbb{T}^m) \simeq \mathbb{Z}^m$ , et que pour tout entier  $n$ ,  $\pi_1(L_n^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .*

*L'espace  $\mathbb{T}^m \times (L_{n_1}^{2m+1}) \times \dots \times (L_{n_r}^{2m+1})$  admet donc  $G$  pour groupe fondamental.*

Ainsi, les revêtements simplement connexes d'un espace  $B$  connexe et localement connexe par arcs est un revêtement galoisien dont on peut facilement déterminer le groupe d'automorphismes.

Si nous revenons à présent à notre problème de classification des revêtements, nous avons, à la fin de la section précédente que les revêtements universels permettent de retrouver tous les revêtements connexes d'un espace  $B$  à partir des sous-groupes du groupe d'automorphisme.

Le revêtement "idéal" que nous aimerions avoir pour classier les revêtements connexes d'un espace  $B$  connexe et localement connexe par arcs serait donc un revêtement universel simplement connexe. Mais c'est en réalité beaucoup plus simple que cela car on a la proposition suivante :

**Proposition 3.1.10.** *Tout revêtement simplement connexe de  $B$  est un revêtement universel.*

*Démonstration.* Si  $q : D \rightarrow B$  est un revêtement connexe de  $B$ , d'après la proposition 3.1.6, il existe un morphisme de  $E$  sur  $D$ , et ceci implique que  $D$  est isomorphe à un revêtement associé à  $E$  d'après la proposition 2.2.3.

La réciproque de cette proposition est aussi vraie (voir [Sp]).

Les revêtements universels de  $B$  sont donc exactement les revêtements simplement connexes de  $B$ . La question est donc à présent de savoir : dans quels cas l'espace  $B$  admet-il un revêtement universel?

Pour répondre à cette question, nous allons à présent introduire la notion d'espace semi-localement simplement connexe.

**Définition 3.1.2.** *Un espace  $B$  est semi-localement simplement connexe si : pour tout  $b \in B$ , il existe un voisinage  $V_b$  de  $b$  tel que tout lacet de base  $b$  dans  $V_b$  soit homotope dans  $B$  au lacet constant  $c_b$ .*

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 3.1.11.** *Un espace  $B$  connexe et localement connexe par arcs possède un revêtement universel si et seulement s'il est semi-localement simplement connexe.*

Voici une idée de la construction du revêtement universel lorsque  $B$  est connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe.

On commence par recouvrir  $B$  par des ouverts  $V$  dont tous les lacets sont homotopes au lacet constant (c'est possible car  $B$  est semi-localement simplement connexe).

On fixe  $b \in B$  et on note  $E$  l'ensemble des classes d'homotopies des chemins

d'origine  $b$  dans  $B$ .

Soit  $p : E \rightarrow B$  l'application définie par :  $p([c]) = c(1)$

Pour tout  $V$ , on fixe  $b_V \in V$  et on note  $F_V := p^{-1}(b_V)$  (que l'on considère comme un espace discret).  $p : E \rightarrow B$  est alors un revêtement de  $B$  dont les voisinages distingués sont les  $V$ , et les trivialisations sont donnée par les applications  $\Phi_V : p^{-1}(V) \rightarrow V \times F_V$ ,  $[c] \mapsto (p([c]), [\gamma])$  de réciproque  $(x, [\gamma]) \mapsto [\gamma\lambda]$  pour  $b \in V$  fixé (où  $\gamma$  est un chemin joignant  $b$  à  $b_V$  et  $\lambda$  un chemin joignant  $b_V$  à  $c(1)$  tels que  $[c] = [\gamma\lambda]$ ).

On montre enfin que le revêtement  $p : E \rightarrow B$  est simplement connexe, donc universel (cf. [G].Chapitre IX.5.3).

On peut alors donner le théorème suivant :

**Théorème 3.1.12.** *Soit  $B$  un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe; et  $b \in B$  fixé.*

- *L'espace  $B$  possède un revêtement simplement connexe  $p : E \rightarrow B$ . Ce revêtement est un revêtement universel de  $B$ , et le groupe  $G = \text{Aut}(E)$  des automorphismes de  $E$  est isomorphe au groupe fondamental  $\pi_1(B, b)$ .*
- *Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , alors  $q_H : E/H \rightarrow B$  est un revêtement connexe de  $B$ , et il est galoisien si et seulement si  $H$  est distingué dans  $G$  (et on a alors  $\text{Aut}(E/H) \simeq G/H$ ).*
- *Réciproquement, si  $q : D \rightarrow B$  est un revêtement connexe de  $B$ , alors il est isomorphe à  $q_H : E/H \rightarrow B$ , (où  $H$  est le stabilisateur d'un point  $x$  de  $q^{-1}(b)$ , et c'est alors un sous-groupe de  $G$ ).*
- *Deux revêtements  $q_H : E/H \rightarrow B$  et  $q_K : E/K \rightarrow B$  sont isomorphes si et seulement si  $H$  et  $K$  sont conjugués dans  $G$ .*

Ce théorème permet donc de classifier les revêtements connexes de  $B$  à isomorphisme près.

Appliquons ce résultat au cas du cercle  $\mathbb{S}^1$  et de la bouteille de Klein :

**Exemple 3.1.3.** • *Nous savons que :  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ .*

*Les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont les  $n\mathbb{Z}$  où  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Un revêtement simplement connexe de  $\mathbb{S}^1$  est donné par la projection :*

$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$ . Les revêtements connexes de  $\mathbb{S}^1$  sont donc tous isomorphes à un revêtement  $q_{n\mathbb{Z}} : \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1, [\theta] \mapsto e^{2i\pi\theta}$ , qui n'est autre que le revêtement  $q_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^n$ .

- Notons  $B$  la bouteille de Klein que l'on définit comme l'espace homogène  $:\mathbb{R}^2/G$  où  $G$  est le groupe  $\langle a, b \mid bab = a \rangle$ , où  $a : (x, y) \mapsto (-x, y + 1)$  et  $b : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ .  
Les éléments de  $G$  s'écrivent alors de manière unique  $a^m b^n$  avec  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Déterminons les sous-groupes de  $G$  : on peut vérifier qu'ils sont tous de la forme  $H_{m,n} = (a^m b^n)$  ou de la forme  $K_{m,n,p} = (a^m b^n, b^p)$  avec  $m \neq 0, p > 0$  et  $0 \leq n < p$ . On vérifie alors que  $K_{m,n,p}$  et  $H_{m,n}$  sont distingués dans  $G$  si et seulement si  $m$  est pair (les revêtements correspondants seront alors galoisiens).

L'espace  $E_{m,n} = \mathbb{R}^2/H_{m,n}$  est homéomorphe au cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  pour  $m$  pair, et à la bande de Moebius pour  $m$  impair.

L'espace  $E_{m,n,p} = \mathbb{R}^2/K_{m,n,p}$  est homéomorphe au tore  $\mathbb{T}^2$  pour  $m$  pair, et à la bouteille de Klein pour  $m$  impair.

Les seuls revêtements de  $B$  à isomorphisme près sont donc le cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , le tore  $\mathbb{T}^2$ , la bande de Moebius, et la bouteille de Klein  $B$ .

## 3.2 Quelques rappels de théorie de Galois

Dans ce qui suit  $K$  désigne un corps isomorphe à un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

**Définition 3.2.1.** Une **extension** de  $K$  de degré fini  $n$  est une  $K$ -algèbre  $L$ , qui soit un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On note  $[L : K] = n$  la dimension de  $L$  sur  $K$ , aussi appelée **degré** de  $L$  sur  $K$ .

**Proposition 3.2.1.** Soit  $L$  une extension de  $K$ .

Soit  $x \in L$ .

On note alors  $K[x] := \{P(x) \mid P \in K[X]\}$  et  $K(x) := \{F(X) \mid F \in K(X)\}$ .

On est dans l'un des cas suivant.

- Ou bien l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
  1.  $[K(x) : K] < +\infty$
  2. Il existe un polynôme unitaire  $P \in K[X]$  tel que  $P(x) = 0$ .

3. Il existe un polynôme irréductible unitaire de degré fini noté  $P_{x,K} \in K[X]$  tel que  $P_{x,K}(x) = 0$ . Le polynôme  $P_{x,K}$  est alors unique et est appelé le **polynôme minimal** de  $x$  sur  $K$  et on a alors  $[K(x) : K] = \deg(P_{x,K})$

4.  $K[x] = K(x)$

$x$  est alors dit **algébrique** sur  $K$ .

- Ou bien  $[K(x) : K] = +\infty$ , et on dit alors que  $x$  est **transcendant** sur  $K$ .

**Remarque 3.2.1.** Tout comme nous avons défini  $K(x)$ , on peut définir, pour  $x, y \in L$ ,  $K[x, y] = \{P(x, y) | P \in K[X, Y]\} = K[x][y]$ . Plus généralement encore, pour  $x_1, x_2, \dots, x_n : K[x_1, x_2, \dots, x_n] = \{P(x_1, x_2, \dots, x_n) | P \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]\}$

**Définition 3.2.2.** Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré  $n$  de  $K[X]$  et soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ses racines dans une clôture algébrique de  $K$  (comptées avec multiplicité).

Un **corps de décomposition** de  $P$  est une extension  $L$  de  $K$  de degré fini telle que  $L = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

**Proposition 3.2.2.** Soit  $L/K$  une extension de  $K$  de degré fini et  $G_{L/K}$  son groupe de Galois. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $L^{G_{L/K}} = K$ ,
2. Pour tout  $x \in L$ , toutes les racines de  $P_{x,K}$  sont dans  $L$ ,
3.  $L$  est un corps de décomposition d'un polynôme  $P$  de  $K[X]$ ,
4.  $[L : K] = |G|$ .

Si l'une de ces propositions est vérifiée on dit alors que  $L/K$  est une **extension galoisienne** de  $K$ .

**Lemme 3.2.3** (Artin). Soit  $L/K$  une extension galoisienne de  $K$  (de degré fini). Soit  $H$  un sous-groupe fini de  $G_{L/K}$ . On note  $L^H := \{x \in L | \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H\}$ .

L'extension  $L/L^H$  est alors une extension galoisienne de groupe de Galois  $H$  et on a donc  $[L : L^H] = |H|$ .

**Théorème 3.2.4** (Correspondance de Galois). Soit  $L/K$  une extension galoisienne de  $K$  de groupe de Galois  $G_{L/K}$ .

- Si  $H$  est un sous-groupe de  $G_{L/K}$ , alors  $L^H/K$  est une sous-extension de  $L/K$  et elle est galoisienne si et seulement si  $H$  est distingué dans  $G_{L/K}$  (et on a alors  $G_{L^H/K} \simeq G_{L/K}/H$ ).
- Réciproquement, si  $E/K$  est une sous-extension de  $L/K$ , alors  $E = L^H$ , (où  $H = G_{L/E}$ , qui est un sous-groupe de  $G$ ).

**Remarque 3.2.2.** On peut reformuler la correspondance de Galois de la façon suivante : On a la correspondance biunivoque entre l'ensemble  $\mathcal{E}$  des sous-extensions  $E/K$  de  $L$  (i.e. les extensions de  $K$  incluses dans  $L$ ) et l'ensemble  $\mathcal{G}$  des sous-groupes de  $G_{L/K}$  donnée par l'application :

- $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}, E \mapsto G_{L/E}$
- Sa réciproque est  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}, H \mapsto L^H$ .

De plus, si l'on considère l'action de  $G_{L/K}$  sur  $\mathcal{E}$  donnée par  $G_{L/K} \times \mathcal{E}, (\sigma, E) \mapsto \sigma(E)$ , ainsi que l'action de  $G_{L/K}$  sur  $\mathcal{G} : G_{L/K} \times \mathcal{G}, (\sigma, H) \mapsto \sigma H \sigma^{-1}$ , les bijections  $\phi$  et  $\psi$  sont alors compatibles avec ces actions.

C'est-à-dire, si  $E \in \mathcal{E}, \sigma \in G_{L/K}$ , alors  $G_{L/\sigma(E)} = \sigma G_{L/E} \sigma^{-1}$ , et si  $H \in \mathcal{G}, \sigma(L^H) = L^{\sigma H \sigma^{-1}}$

### 3.3 Revêtements/extensions de corps

Lors des sections précédentes, nous avons mis l'accent sur les similitudes que nous avons pu rencontrer entre les résultats de la théorie des revêtements et de la théorie de Galois.

Ces similitudes ont ici été regroupées dans le tableau suivant : on y voit apparaître à gauche les objets et théorèmes de la théorie de Galois (cf. section précédente), et à droite les objets et théorèmes correspondants de la théorie des revêtements.

<b>Théorie de Galois</b>	<b>Revêtements</b>
Extension $L$ d'un sous-corps $K$ de $\mathbb{C}$	Revêtement $p : E \rightarrow B$
Extension galoisienne $L$ de $K$	Revêtement galoisien $p : E \rightarrow B$ de $B$
Sous-extensions $E$ de $L/K$	Revêtements associés $p_F : E_F \rightarrow B$
Groupe de galois d'une extension galoisienne $L : G_{L/K} = \text{Aut}_K(L)$	Groupe des automorphismes d'un revêtement galoisien $E : G = \text{Aut}(E)$
Correspondance de Galois : $H \subset G_{L/K} \mapsto L^H$	Correspondance : $H \subset G \mapsto (q_H : E/H \rightarrow B)$
Si $H \subset G_{L/K}$ , alors $(L^H/K \text{ est galoisienne}) \Leftrightarrow (H \triangleleft G_{L/K})$ et $G_{L^H/K} \simeq G_{L/K}/H$	Si $H \subset G$ , alors $(q_H : E/H \rightarrow B \text{ est galoisien}) \Leftrightarrow (H \triangleleft G)$ et $\text{Aut}(E/H) \simeq G/H$

Cette comparaison peut paraître pour le moins surprenante, et nous serions en droit de nous demander s'il n'existe pas un lien direct entre ces deux théories.

En fait, c'est bien le cas, et ce lien sera détaillé dans la partie suivante, dans le cas des revêtements des surfaces de Riemann.



**PARTIE II**  
**SURFACES DE RIEMANN**

# Mise en bouche

Le but de cette partie est d'utiliser les résultats obtenus dans la partie précédente pour répondre au problème inverse de Galois. Dans son article *Groupe de Galois sur  $\mathbb{Q}$* , Jean-Pierre Serre expose le problème suivant (cf. [S]):

étant donné un groupe  $G$  de type fini, existe-t-il une extension galoisienne finie  $E$  de  $\mathbb{Q}$  dont le groupe de Galois  $Gal(E/\mathbb{Q})$  soit isomorphe à  $G$ ?

Dans le cas où  $G$  est un groupe abélien fini, le problème admet bien des solutions :

On suppose que  $G$  est un groupe abélien fini. On sait alors que  $G$  s'écrit sous la forme  $\prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ . Or d'après le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet, il existe une infinité de nombres premiers  $p_i$  congrus à 1 modulo  $n_i$  (pour tout  $i$ ). Par conséquent, il existe une famille  $(p_i)$  de nombres premiers distincts tels que  $(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})^*$  contienne un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ . On a alors un morphisme surjectif  $\phi$  de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  dans  $\prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} = G$  où  $p$  désigne le produit  $p = \prod_{i=1}^r p_i$ . Soit  $L$  le corps cyclotomique sur  $\mathbb{Q}$  engendré par les racines  $p^{eme}$  de l'unité. Son groupe de Galois est alors isomorphe à  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . Or,  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/Ker(\phi) \simeq G$ . Mais par la correspondance de Galois, ceci est le groupe de Galois de l'extension  $L^{Ker(\phi)}$ . D'où le résultat.

Dans le cas où  $G$  est un groupe non abélien, c'est beaucoup plus difficile.

Une méthode efficace consiste à se ramener à l'étude des extensions de  $\mathbb{Q}(T)$  (corps des fractions rationnelles sur  $\mathbb{Q}$ ).

Si  $E_T$  est une extension galoisienne finie de  $\mathbb{Q}(T)$ , de groupe de Galois  $G$  d'ordre  $n$ .  $E_T$  est alors un corps de décomposition d'un certain polynôme  $P_T(X) = X^n + a_{n-1}(T)X^{n-1} + \dots + a_0(T) \in \mathbb{Q}(T)[X]$  irréductible sur  $\mathbb{Q}(T)$ . Le théorème d'irréductibilité de Hilbert assure l'existence d'une infinité de rationnels  $t \in \mathbb{Q}$  tels que  $P_t(X) = X^n + a_{n-1}(t)X^{n-1} + \dots + a_0(t) \in \mathbb{Q}[X]$  soit irréductible. Choisissons un tel rationnel  $t$ .

L'algèbre  $E_t[X] := \mathbb{Q}[X]/(P_t[X])$  est alors une extension galoisienne de degré  $n$  sur  $\mathbb{Q}$  et de groupe de Galois  $G$ .

Ainsi lorsqu'on a une extension galoisienne de  $\mathbb{Q}(T)$  de groupe de Galois  $G$  fini, on peut en déduire l'existence d'une extension galoisienne de  $\mathbb{Q}$  de groupe de Galois  $G$ .

Pour faire le lien avec la théorie des revêtements, nous devrions identifier  $\mathbb{Q}(T)$  à l'ensemble des fractions rationnelles sur  $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ . Mais cet ensemble à une géométrie compliquée, voilà pourquoi, pour simplifier, nous allons plonger  $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , et nous nous intéresserons alors exclusivement au cas des extensions finies de  $\mathbb{C}(T)$ .

Le problème devient alors : pour un groupe fini  $G$  fixé, existe-t-il des extensions galoisiennes de  $\mathbb{C}(T)$  de groupe de Galois  $G$ ?

Une solution à ce problème consiste à utiliser la correspondance entre la théorie des revêtement des surfaces de Riemann et la théorie de Galois. Plus précisément, nous allons voir dans le chapitre 6 que si l'on a revêtement galoisien de la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$  (voir 4.1.1) de groupe d'automorphisme  $G$ , on peut en déduire l'existence d'une extension galoisienne de  $\mathbb{C}(T)$  de groupe de Galois  $G$ .

Nous ramènerons donc le problème à : pour un groupe de type fini  $G$  donné existe-t-il un revêtement galoisien de  $\mathbb{P}^1$  dont le groupe de Galois est  $G$ ?

Pour construire un tel revêtement commençons par donner une présentation de  $G$  : Supposons que  $G$  admette  $n$  générateurs et posons  $F := F_{\{a_1, \dots, a_n\}}$  le groupe libre engendré par  $n$  éléments. On construit alors un morphisme surjectif  $f : F \rightarrow G$  de noyau  $H := \ker(f)$ . On a alors  $G \simeq F/H$ .

Posons à présent  $X := \mathbb{P}^1 \setminus \{z_1, \dots, z_{n+1}\}$  la sphère de Riemann privée de  $n + 1$  points. Le groupe fondamental de cette surface est alors  $\pi_1(X) \simeq F$  (signalons au passage que dans son exposé, Jean-Pierre Serre identifie plutôt  $\pi_1(X)$  au groupe engendré par  $n + 1$  éléments  $c_1, \dots, c_{n+1}$  avec la relation  $c_1 \dots c_{n+1} = 1$ , ce qui finalement revient bien à notre groupe libre  $F$  engendré par  $n$  éléments). D'après la partie I, on sait qu'il existe un revêtement universel  $\tilde{X}$  de  $X$ , et on a alors  $\text{Aut}(\tilde{X}) \simeq F$ .

Par ailleurs,  $H = \ker(f)$  est distingué dans  $F$ . Il suffit donc de prendre l'espace homogène  $\tilde{X}/H$  pour obtenir un revêtement galoisien  $p : \tilde{X}/H \rightarrow X$  de groupe  $\text{Aut}(\tilde{X}/H) \simeq F/H \simeq G$ .

Nous déterminons donc ainsi un revêtement galoisien de  $\mathbb{P}^1 \setminus \{z_1, \dots, z_{n+1}\}$  de groupe  $G$ . Nous aimerions alors pouvoir le prolonger en un revêtement galoisien de  $\mathbb{P}^1$  de groupe  $G$ . Nous verrons dans le chapitre 5 que c'est possible (dans un cadre plus général).

Le chapitre 6 nous permettra alors d'établir une correspondance entre les revêtements galoisiens de  $\mathbb{P}^1$  et les extensions galoisiennes de  $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$  l'algèbre des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{P}^1$  (voir chapitre 4).

# Chapitre 4

## Revêtements des surfaces de Riemann

### 4.1 Surfaces de Riemann

Pour définir les surfaces de Riemann, nous devons avant tout introduire les notions suivantes :

**Définition 4.1.1.** *Une variété de dimension  $n$  est un espace topologique séparé  $X$  tel que tout point  $x \in X$  admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Définition 4.1.2.** *Soit  $X$  une variété de dimension 2.*

- Une **carte complexe** sur  $X$  est un homéomorphisme  $\phi : U \rightarrow V$  d'un ouvert  $U$  de  $X$  sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{C}$ .
- Deux cartes complexes  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  et  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  sont dites **holomorphiquement compatibles** si l'application  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$  est biholomorphe.
- Un **atlas complexe** sur  $X$  est un ensemble  $\mathfrak{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i, i \in I\}$  de cartes complexes holomorphiquement compatibles et dont les ouverts recouvrent  $X : \bigcup_{i \in I} U_i = X$ .
- Deux atlas complexes  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}'$  sont **analytiquement équivalents** si toute carte de  $\mathfrak{A}$  est holomorphiquement compatible avec n'importe quelle carte de  $\mathfrak{A}'$ . La relation "être analytiquement équivalent à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas complexes sur  $X$ .

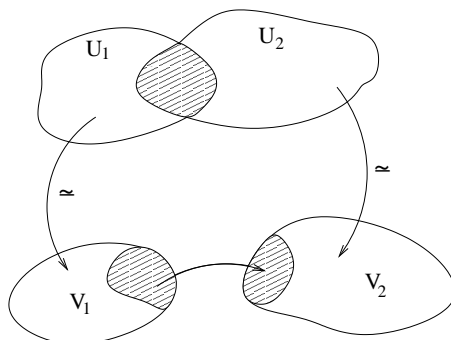


Figure 4.1: cartes complexes

- Une **structure complexe** sur  $X$  est une classe d'équivalence d'atlas complexes sur  $X$  analytiquement équivalents.

Nous avons à présent tous les éléments nécessaires pour définir les surfaces de Riemann :

**Définition 4.1.3.** Une **surface de Riemann** est un couple  $(X, \Sigma)$ , où  $X$  est une variété de dimension 2 connexe et  $\Sigma$  une structure complexe sur  $X$ .

Par la suite nous utiliserons la notation  $X$  pour désigner une surface de Riemann, lorsque la structure complexe dont elle est munie est claire.

Voici quelques exemples simples de surfaces de Riemann :

**Exemple 4.1.1.** • Le plan complexe est clairement une surface de Riemann (dont la seule carte complexe est l'identité sur  $\mathbb{C}$ ).

- La sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est une surface de Riemann.

En effet on munit  $\mathbb{P}^1$  de la topologie suivante : les ouverts de  $\mathbb{P}^1$  sont les ouverts de  $\mathbb{C}$  et les ensembles du type  $V \cup \{\infty\}$  où  $V$  est le complémentaire d'un compact dans  $\mathbb{C}$  (La sphère de Riemann munie de cette topologie est alors compacte). On peut recouvrir  $\mathbb{P}^1$  par les ouverts  $U_1 := \mathbb{C}$  et  $U_2 := \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ , et on définit les cartes complexes

$$\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z \text{ et } \phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases} . \text{ De plus}$$

$U_1$  et  $U_2$  sont connexes, donc  $\mathbb{P}^1$  est bien connexe.

Remarquons bien que cette définition de la sphère de Riemann n'est pas la même que celle donnée par la projection stéréographique : en effet, si la projection d'un point sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  à partir du pôle nord  $N$  nous donne un point  $z$ , la projection de ce même point à partir du pôle sud  $S$  donne le point  $1/\bar{z}$  (et non le point  $1/z$ ).

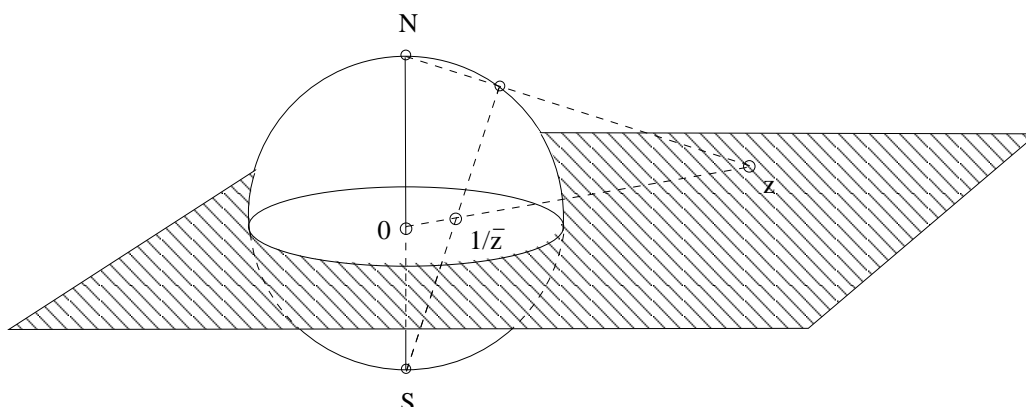


Figure 4.2: projection stéréographique

- *Les tores* : Soient  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ . On définit  $\Gamma := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ . Un tel ensemble est appelé un réseau (voir dessin ci-dessous). L'espace homogène  $\mathbb{C}/\Gamma$  muni de la topologie quotient est une surface de Riemann.

En effet si l'on considère un ouvert  $V$  de  $\mathbb{C}$  qui ne contient pas de paire de points équivalents (par exemple les voisinages  $V_1, V_2, V_3$  sur le dessin) alors  $U := \pi(V)$  (où  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  est la projection canonique) est un ouvert de  $\mathbb{C}/\Gamma$ , et on peut recouvrir cet espace par de tels ouverts. Puisque les  $V$  n'admettent pas de paire de points équivalents, on peut définir les cartes  $\phi : U \rightarrow V$  (réciproques de  $\pi|_V$ ), et on munit ainsi l'espace  $\mathbb{C}/\Gamma$  d'une structure complexe. De plus, puisque  $\mathbb{C}$  est connexe,  $\mathbb{C}/\Gamma$  est connexe.

L'espace  $\mathbb{C}/\Gamma$  est appelé tore car on a un homéomorphisme  $f : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  défini par  $f(\lambda w_1 + \mu w_2) = (e^{2i\pi\lambda}, e^{2i\pi\mu})$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Nous allons à présent définir les fonctions holomorphes sur une surface de Riemann donnée à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 4.1.4.** Soit  $X$  une surface de Riemann et  $Y$  un ouvert de  $X$ . Une fonction  $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$  est dite **holomorphe** si, pour toute carte complexe  $\phi : U \rightarrow V$  sur  $X$ , la fonction  $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap Y) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe (au sens usuel). On notera  $\mathcal{O}(Y)$  l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $Y$ .

Remarquons qu'en particulier, les cartes complexes sur  $X$  sont holomorphes sur leur ensemble de définition. On définit ensuite les fonctions holomorphes d'une surface de Riemann dans une autre :

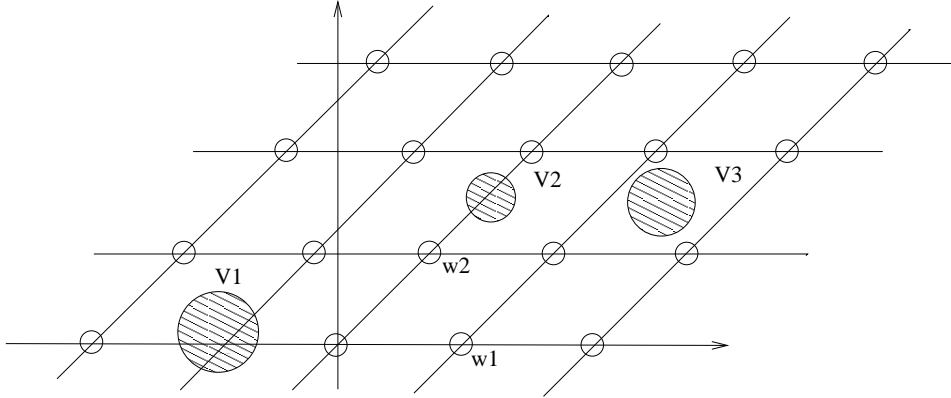


Figure 4.3: exemple de réseau

**Définition 4.1.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann.

Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est dite **holomorphe** si pour tout couple de cartes  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  sur  $X$  et  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  sur  $Y$ , avec  $f(U_1) \subset U_2$  l'application  $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : V_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow V_2 \subset \mathbb{C}$  est holomorphe (au sens usuel). Une application  $f : X \rightarrow Y$  est **biholorphe** si elle est bijective et si  $f, f^{-1}$  sont holomorphes.

On dit que deux surfaces de Riemann  $X$  et  $Y$  sont **isomorphes** s'il existe une application biholorphe de  $X$  dans  $Y$ .

**Exemple 4.1.2.** Soient  $\Gamma := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$  et  $\Gamma' := \mathbb{Z}w'_1 + \mathbb{Z}w'_2$  deux réseaux. Soit  $a \in \mathbb{C}^*$  tel que  $a\Gamma \subset \Gamma'$ .

L'application  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az$  induit une application holomorphe  $f : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma', [z] \mapsto [az]$ .

En effet, si  $\phi : U \rightarrow V$  et  $\phi' : U' \rightarrow V'$  sont des cartes telles que  $f(U) \subset U'$  respectivement sur  $\mathbb{C}/\Gamma$  et  $\mathbb{C}/\Gamma'$ , on a alors  $\phi^{-1} = \pi|_V$  donc :  $\forall z \in V$   $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}(z) = \phi' \circ f([z]) = \phi'([az]) = az + k_1w'_1 + k_2w'_2$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont des entiers fixés indépendants de  $z \in V$ . On remarque que cette application est bien holomorphe, donc  $f$  est holomorphe.

Voici un premier résultat sur les fonctions holomorphes d'une surface de Riemann dans une autre surface de Riemann

**Théorème 4.1.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann et  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  sont deux applications holomorphes qui coïcident sur un ensemble  $A \subset X$  qui admet un point limite  $a \in X$ . Alors,  $f_1$  et  $f_2$  coïcident sur  $X$ .

Nous pouvons également définir les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann :



**Définition 4.1.6.** Soit  $X$  une surface de Riemann et  $Y$  un ouvert de  $X$ . Une fonction **méromorphe** sur  $Y$  est une fonction holomorphe  $f : Y' \rightarrow \mathbb{C}$  sur un ouvert  $Y' \subset Y$  tel que :

1.  $Y \setminus Y'$  ne contient que des points isolés.
2. Pour tout point  $p \in Y \setminus Y'$  on a  $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$

Les points de  $Y \setminus Y'$  sont les **pôles** de  $f$ .

L'ensemble des fonctions méromorphes sur  $Y$  sera noté  $\mathcal{M}(Y)$ .

**Remarque 4.1.1.** Pour une surface de Riemann  $X$  donnée, l'ensemble  $\mathcal{M}(X)$  des fonctions méromorphes sur  $X$  forme un corps.

**Exemple 4.1.3.** L'application  $f : z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$  est holomorphe sur l'ouvert  $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$  de  $\mathbb{P}^1$ . (immédiat car c'est une carte sur  $\mathbb{P}^1$ ). On peut la prolonger en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{P}^1$ . En effet,  $\lim_{z \rightarrow 0} |\frac{1}{z}| = \infty$ .

Plus généralement, les homographies  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , avec  $ad - bc \neq 0$ , sont holomorphes (au sens usuel) sur  $\{z \in \mathbb{C} | cz + d \neq 0\}$ . Ces fonctions peuvent être prolongées en des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{P}^1$ .

Un autre exemple de fonction méromorphe est la fonction  $\wp$  de Weierstrass:

**Exemple 4.1.4.** Soit  $\Gamma = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$  un réseau. La fonction de Weierstrass est la fonction définie par

$$\wp_{\Gamma}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

. Elle est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , et ses pôles sont les points de  $\Gamma$ .

En effet, on remarque que la série converge absolument et normalement sur chaque compact de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  (les termes de la série étant majorés par  $|\gamma|^{-3}$ ). La fonction est alors holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Il est clair que  $\lim_{z \rightarrow \gamma} |f(z)| = \infty$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ .  $\wp$  est donc méromorphe sur  $\mathbb{C}$ .

Nous allons à présent étudier les propriétés des fonctions holomorphes sur des surfaces de Riemann. Nous verrons que l'on retrouve sensiblement les mêmes résultats que pour les fonctions holomorphes au sens usuel.

**Théorème 4.1.2** (des singularités de Riemann). Soit  $U$  un ouvert d'une surface de Riemann et soit  $a \in U$  et  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$  bornée sur un voisinage de  $a$ .  $f$  peut alors être prolongée en une fonction  $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ . On dit alors que  $a$  est une singularité **apparente**.

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.1.8.

**Théorème 4.1.3.** Soit  $X$  une surface de Riemann et  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Pour chaque pôle  $p$  on définit  $f(p) := \infty$ .  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  est alors une application holomorphe.

Réciproquement, si  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  est une application holomorphe, alors ou bien  $f$  est identiquement égale à  $\infty$ , ou bien  $f^{-1}(\infty)$  est un ensemble de points isolés et  $f : X \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{P}^1$  est une fonction holomorphe sur  $X$ .

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.1.15.

**Exemple 4.1.5.** L'exemple 4.1.3 illustre parfaitement cette situation :  $f : \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1$ ,  $z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$  est une fonction méromorphe sur  $\mathbb{P}^1$ . Si l'on pose  $f(0) = \infty$ , alors  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est bien une fonction holomorphe (elle est même biholomorphe : on a  $f \circ f = Id_{\mathbb{P}^1}$ )

**Théorème 4.1.4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe non constante. Soit  $a \in X$  et  $b := f(a)$ . Alors, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  et des cartes  $\phi : U \rightarrow V$  sur  $X$ , et  $\psi : U' \rightarrow V'$  sur  $Y$  telles que :

1.  $a \in U$ ,  $\phi(a) = 0$ ,  $b \in U'$ ,  $\psi(b) = 0$ ,
2.  $f(U) \subset U'$ ,
3. L'application  $F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow V'$  est donnée par  $F(z) = z^k$  pour tout  $z \in V$ . On appelle  $k$  la **multiplicité** au point  $a$ . On peut caractériser cet entier ainsi : c'est l'entier  $k$  tel que pour tout voisinage  $U_0$  de  $a$ , il existe un voisinage  $U \subset U_0$  de  $a$  et un voisinage  $V$  de  $b$  tel que pour tout  $y \in V$ ,  $f^{-1}(y) \cap U$  contient  $k$  éléments.

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.2.1.

**Exemple 4.1.6.** Dans l'exemple 4.1.5, tous les points de  $\mathbb{P}^1$  ont pour multiplicité 1. En effet, si nous reprenons les ouverts  $U_1$  et  $U_2$  ainsi que les cartes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  de l'exemple 4.1.1 on a :

- Si  $z \in \mathbb{C}$ , alors  $z \in U_1$  et  $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}(z) = z$ .

- Si  $z = \infty$ , alors  $z \in U_2$  et  $\phi_1 \circ f \circ \phi_2^{-1}(z) = z$ .

Un autre exemple est le cas d'une fonction polynôme  $f : z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  prolongée en une fonction holomorphe  $\tilde{f} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  en posant  $f(\infty) = \infty$ .  $\infty$  a pour multiplicité  $k$ .

Voici à présent quelques corollaires de ce théorème :

**Corollaire 4.1.5.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe non constante.  $f$  est alors ouverte, c'est-à-dire, l'image par  $f$  de tout ouvert de  $X$  est un ouvert de  $Y$ .*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.2.4.

**Corollaire 4.1.6.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe injective.  $f$  est alors une application biholomorphe de  $X$  sur  $f(X)$ .*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.2.5.

**Corollaire 4.1.7** (Principe du maximum). *Soit  $X$  une surface de Riemann et  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une application holomorphe non constante. Le module de  $f$  n'atteint pas sa borne supérieure.*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.2.6.

**Théorème 4.1.8.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann. On suppose que  $X$  est compact. soit  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe non constante.  $Y$  est alors compact et  $f$  est surjective*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.2.7.

Dans le cas particulier où  $Y = \mathbb{C}$ , puisque  $\mathbb{C}$  n'est pas compact, on en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1.9.** *Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Toute application holomorphe  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  est constante.*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.2.8.

## 4.2 Revêtements des surfaces de Riemann

**Définition 4.2.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann, et  $p : Y \rightarrow X$  une application holomorphe non constante.

Un point  $y \in Y$  est appelé **point de ramification** de  $p$  s'il n'existe aucun voisinage  $V$  de  $y$  tel que  $p|_V$  soit injective .

On dira que l'application  $p$  est **non ramifiée** si elle n'admet pas de point de ramification.

On a une caractérisation des applications non ramifiées donnée par le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1.** Soient,  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann.

Une application holomorphe non constante  $p : Y \rightarrow X$  est non ramifiée si et seulement si c'est un homéomorphisme local.

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.4.4.

Voici quelques exemples :

**Exemple 4.2.1.** • Soit  $k \geq 2$  et soit  $p_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^k$ . Le point 0 est alors un point de ramification de  $p_k$  (et c'est le seul). L'application  $p|_{\mathbb{C}^*}$  est alors non ramifiée.

• L'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est holomorphe et non ramifiée.

**Remarque 4.2.1.** D'après le théorème 4.1.4, le résultat du premier exemple nous permet d'affirmer que,  $X$  et  $Y$  sont des surfaces de Riemann, et  $p : Y \rightarrow X$  une application holomorphe non constante, un point  $y \in Y$  est un point de ramification si et seulement si  $f$  prend la valeur  $x := f(y)$  en  $y$  avec multiplicité  $k \geq 2$ .

Nous allons à présent reprendre les notions étudiée dans la partie précédente, et voir quels résultats nous obtenons dans le cadre des Surfaces de Riemann. Nous verrons entre autre que nous nous intéresserons plus particulièrement aux revêtements holomorphes de surfaces de Riemann par des surfaces de Riemann (donc des revêtements connexes) .

Avant tout, nous allons donner un résultat qui généralise la proposition 3.1.2:

**Théorème 4.2.2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques séparés,  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement de  $Y$ .

Si  $Z$  un espace connexe, localement connexe par arcs et simplement connexe, et  $f : Z \rightarrow X$  une application continue, alors pour tout  $z \in Z$  et  $y \in Y$  tels que  $f(z) = p(y)$ , il existe un unique relèvement  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$  de  $f$  tel que  $\tilde{f}(z) = y$

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.4.17.

Voici à présent un premier résultat concernant les relèvements d'applications holomorphes non ramifiées.

**Théorème 4.2.3.** *Soient  $X, Y$  et  $Z$  des surfaces de Riemann.*

*Si  $p : Y \rightarrow X$  est une application holomorphe non ramifiée et  $f : Z \rightarrow X$  une application holomorphe, alors tout relèvement  $g : Z \rightarrow Y$  de  $f$  est holomorphe.*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.4.9.

Un exemple simple qui illustre cette situation est le logarithme d'une fonction :

**Exemple 4.2.2.** *On considère une surface de Riemann simplement connexe  $X$ . Etant donnée une application holomorphe  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ , on cherche à déterminer un logarithme de  $f$ , c'est-à-dire une fonction  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $f = \exp(F)$ , donc telle que le diagramme suivant commute:*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ & \nearrow F & \downarrow \exp \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

*Par conséquent chercher  $F$  revient à chercher un relèvement holomorphe de  $f$ .*

*Or,  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un revêtement de  $\mathbb{C}^*$ , donc d'après le théorème 4.2.2, un unique relèvement  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $F(x) = z$  pour tout choix de  $(x, z)$  tels que  $f(x) = e^z$ .*

*Mais d'autre part,  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est holomorphe et non ramifiée, donc d'après le théorème 4.2.3, chacun de ces relèvements est holomorphe.*

*Ainsi, toute application  $f$  holomorphe sur une surface de Riemann simplement connexe à valeurs dans  $\mathbb{C}^*$  admet localement un logarithme.*

Nous allons à présent introduire les applications propres entre espaces topologiques.

**Définition 4.2.2.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces localement compacts.*

*Une application  $f : X \rightarrow Y$  est **propre** si, pour tout  $K \subset Y$  compact,  $f^{-1}(K)$  est compact.*

**Remarque 4.2.2.** Une application propre est nécessairement fermée.

**Lemme 4.2.4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces localement compacts et  $p$  une application propre et discrète. Alors pour tout point  $x \in X$  l'ensemble  $p^{-1}(x)$  est fini.

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.4.21.

**Théorème 4.2.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces localement compacts. Si  $p : Y \rightarrow X$  est homéomorphisme local propre, alors  $p : Y \rightarrow X$  est un revêtement.

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.4.22.

Appliquons ce théorème aux surfaces de Riemann (qui sont des espaces localement compacts) Considérons deux surfaces de Riemann  $X$  et  $Y$ , et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application propre holomorphe non constante. L'ensemble  $A$  des points de ramifications de  $f$  est fermé et discret (cf. théorème 4.1.4). Puisque  $f$  est propre,  $B := f(A)$  est également fermé et discret. On appelle  $B$  l'ensemble des **valeurs critiques** de  $f$ .

Si l'on note  $Y' := Y \setminus B$  et  $X' := X \setminus f^{-1}(B) \subset X \setminus A$ .

L'application  $f|_{X'} : X' \rightarrow Y'$  est alors une application propre holomorphe non ramifiée, et le théorème précédent nous permet de conclure que c'est un revêtement non ramifié de  $Y'$ .

Avant d'aller plus loin, donnons quelques exemples de revêtements non ramifiés :

**Exemple 4.2.3.** •  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un revêtement holomorphe de  $\mathbb{C}^*$ , et c'est même son revêtement universel ( $\mathbb{C}$  étant simplement connexe).

- Soit  $\Gamma = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$  un réseau dans  $\mathbb{C}$ . La projection canonique  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  nous donne alors le revêtement universel du tore complexe  $\mathbb{C}/\Gamma$ . Son groupe d'automorphisme est alors  $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Gamma) \simeq \Gamma \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (on retrouve bien le groupe fondamental du tore).

Dans la section qui va suivre nous allons développer l'exemple des revêtements non ramifié du disque unité privé d'un point et nous verrons alors qu'il est possible de prolonger ce revêtement en un revêtement ramifié du disque unité.

### 4.3 Revêtements du disque unité

Dans cette section on notera  $D$  le disque unité (i.e.  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ )

Avant de parler de revêtements de  $D$ , nous allons nous intéresser aux revêtements holomorphes non ramifiés du disque épointé  $D^* := D \setminus \{0\}$ .

Ces revêtements sont classifiés par le théorème suivant :

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $X$  une surface de Riemann et  $f : X \rightarrow D^*$  un revêtement holomorphe non ramifié de  $D^*$ .*

*Deux cas se présentent:*

1. *Si le revêtement admet un nombre infini de feuillettes, alors il existe une application biholomorphe  $\phi : X \rightarrow H$  sur le demi plan  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$  tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & H \\ & \searrow f & \swarrow \text{exp} \\ & & D^* \end{array}$$

2. *Si le revêtement admet un nombre fini  $k$  de feuillettes, alors il existe une application biholomorphe  $\phi : X \rightarrow D^*$  telle que le diagramme suivant commute (où  $p_k : D^* \rightarrow D^*$  est définie par  $z \mapsto z^k$ ).*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & D^* \\ & \searrow f & \swarrow p_k \\ & & D^* \end{array}$$

Remarquons que les applications  $\text{exp} : H \rightarrow D^*$  et  $p_k : D^* \rightarrow D^*$  sont deux types de revêtements du disque épointé. Le revêtement  $\text{exp} : H \rightarrow D^*$  est d'ailleurs le revêtement universel de  $D^*$  (étant donné que  $H$  est simplement connexe).

Puisque l'application  $\phi$  est biholomorphe (donc bijective), ce théorème implique que tout revêtement du disque épointé est ou bien isomorphe au revêtement  $\text{exp} : H \rightarrow D^*$ , ou bien au revêtement  $p_k : D^* \rightarrow D^*$ .

*Démonstration.*  $\text{exp} : H \rightarrow D^*$  étant un revêtement universel, puisque  $f : X \rightarrow D^*$  est un revêtement connexe de  $D^*$ , il est isomorphe à un revêtement associé du type  $q_G : H/G \rightarrow D^*$  où  $G$  est un sous-groupe de  $\operatorname{Aut}(H)$ .

1. Si  $G = \{Id\}$ , alors  $X$  est isomorphe au revêtement  $exp : H \rightarrow D^*$ . D'où l'existence d'un homéomorphisme  $\phi$  tel que  $exp \circ \phi = f$ . Mais  $\phi$  est alors un relèvement de  $X$  au-dessus de  $f$  qui est une application holomorphe non ramifiée, donc d'après le théorème 4.2.3,  $\phi$  est bien holomorphe (et de même on conclut que  $f^{-1}$  est holomorphe).  $\phi$  est donc bien biholomorphe.
2. Supposons à présent que  $G$  est non trivial. On sait que  $Aut(H) \simeq \pi_1(D^*) \simeq \mathbb{Z}$ . On peut voir  $Aut(H)$  comme le groupe des translations  $\tau_n : z \mapsto z + 2i\pi n$  où  $n \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $G$  est non trivial, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $G = \{\tau_{nk} : z \mapsto z + 2i\pi nk, n \in \mathbb{Z}\}$ . Soit  $g : H \rightarrow D^*$  le revêtement défini par  $g(z) = exp(z/k)$ . De plus,  $H$  étant simplement connexe, et puisque  $f : X \rightarrow D^*$  est un revêtement, le théorème 4.2.2 nous affirme l'existence d'un relèvement  $h : H \rightarrow D^*$  de  $H$  au-dessus de  $exp : H \rightarrow D^*$  et ce relèvement est de plus holomorphe. D'autre part,  $g(z) = g(z')$  si et seulement si il existe  $\tau_{nk} \in G$  tel que  $z' = \tau_{nk}(z)$ . Il existe donc une bijection  $\phi$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & H & \\
 h \swarrow & & \searrow g \\
 X & \xrightarrow{\phi} & D^*
 \end{array}$$

Puisque  $h$  et  $g$  sont localement biholomorphe,  $\phi$  est biholomorphe. Il est alors immédiat que  $exp \circ \phi = f$ .

□

Nous avons donc déterminé les revêtements holomorphes non ramifiés du disque épointé par des surfaces de Riemann. Nous allons en déduire le théorème suivant :

**Théorème 4.3.2.** *Soit  $X$  une surface de Riemann,  $D$  le disque unité et  $f : X \rightarrow D$  une application propre holomorphe non constante et dont 0 est la seule valeur critique. Il existe alors un entier  $k \geq 1$  et une application biholomorphe  $\phi : X \rightarrow D$  tel que le diagramme ci-dessous commute (où  $p_k : z \mapsto z^k$ ) :*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\phi} & D \\
 f \searrow & & \swarrow p_k \\
 & D &
 \end{array}$$



*Démonstration.* Notons  $X^* := f^{-1}(D^*)$ .  $f|_{X^*} : X^* \rightarrow D^*$  est alors un revêtement propre holomorphe et non ramifié de  $D^*$ . D'après le lemme 4.2.4,  $f|_{X^*}$  admet un nombre fini de feuillets. Donc, d'après le théorème précédent, il existe une application biholomorphe  $\phi$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\phi} & D^* \\ & \searrow f & \swarrow p_k \\ & & D^* \end{array}$$

Montrons à présent par l'absurde que  $f^{-1}(0)$  est un singleton (ce qui nous permettra de prolonger l'application  $f$ )

Supposons  $f^{-1}(0)$  contient  $n$  points  $b_1, \dots, b_n$  avec  $n > 1$ . Il existe alors  $n$  voisinages ouverts  $V_i$  des points  $b_i$  disjoints et un disque  $D(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$  avec  $0 < r \leq 1$ , tels que  $f^{-1}(D(r)) \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ .

Posons  $D^*(r) := D(r) \setminus \{0\}$ . Puisque  $f^{-1}(D^*(r))$  est connexe car homéomorphe à  $p_k^{-1}(D^*(r)) = D^*(\sqrt[k]{r})$  (f. diagramme ci-dessus).

Tout point  $b_i$  étant un point d'accumulation de  $f^{-1}(D^*(r))$ ,  $f^{-1}(D(r))$  est également connexe. Ce qui contredit :  $f^{-1}(D(r)) \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ .

On peut donc poser  $\{b\} := f^{-1}(0)$ . On prolonge alors  $\phi$  en  $b$  en posant  $\phi(b) := 0$ . On a ainsi prolongé  $\phi$  en une application biholomorphe  $\phi : X \rightarrow D$  telle que  $p_k \circ \phi = f$ .

□

Remarquons bien que dans cette démonstration nous avons prolongé le revêtement holomorphe non ramifié  $f|_{X^*} : X^* \rightarrow D^*$  en un revêtement holomorphe non ramifié.

Nous aimerions savoir si un tel prolongement est toujours possible. C'est-à-dire, si l'on se donne deux surfaces de Riemann  $X$  et  $Y'$ ,  $A$  un ensemble fermé discret et  $p : Y' \rightarrow X \setminus A$  un revêtement propre holomorphe non ramifié de  $X \setminus A$ , peut-on prolonger  $p$  en un revêtement holomorphe ramifié de  $X$  :  $\tilde{p} : Y \rightarrow X$  ?

Le chapitre qui suit va nous permettre de répondre à cette question.

# Chapitre 5

## Prolongements des revêtements non ramifiés

**Théorème 5.0.3.** *Soit  $X$  une surface de Riemann,  $A \subset X$  un sous-ensemble discret fermé, et soit  $X' := X \setminus A$ . Soit  $Y'$  une surface de Riemann et  $p' : Y' \rightarrow X'$  un revêtement propre holomorphe non ramifié.*

*On peut alors prolonger  $p'$  en un revêtement ramifié de  $X$ . C'est-à-dire qu'il existe une surface de Riemann  $Y$ , une application propre holomorphe  $p : Y \rightarrow X$  et une application biholomorphe  $\phi : Y \setminus p^{-1}(A) \rightarrow Y'$  telle que le diagramme ci-dessous commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 & Y \setminus p^{-1}(A) & \\
 \phi \swarrow & & \downarrow p|_{Y \setminus p^{-1}(A)} \\
 Y' & \xrightarrow{p'} & X'
 \end{array}$$

*Démonstration.* Pour tout  $a \in A$  on choisit un voisinage ouvert  $U_a$  de  $a$  tel que  $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$  pour  $a \neq a'$  et  $\psi_a : U_a \rightarrow D$  une carte complexe à valeurs dans le disque unité du plan complexe telle que  $\psi_a(a) = 0$ . Soit  $U_a^* := U_a \setminus \{a\}$ . Puisque  $p' : Y' \rightarrow X'$  est propre,  $p'^{-1}(U_a^*)$  admet un nombre fini de composantes connexes que l'on note  $V_{a_i}^*$  pour  $i = 1, \dots, n(a)$ . Pour tout  $i$ , l'application  $p'|_{V_{a_i}^*} : V_{a_i}^* \rightarrow U_a^*$  est un revêtement ramifié et puisque  $\psi_a$  est une carte complexe (donc un homéomorphisme),  $\psi_a \circ p' : V_{a_i}^* \rightarrow D^*$  constitue un revêtement ramifié de  $D^*$ . Soit  $k_{a_i}$  son nombre de feuillettes (nécessairement fini puisque  $p'$  est propre). D'après le théorème 4.3.1, il existe une application biholomorphe  $\phi_{a_i} : V_{a_i}^* \rightarrow D^*$  telle que le diagramme suivant commute (où  $p_{a_i}(z) = z^{k_{a_i}}$ )

$$\begin{array}{ccc}
V_{a_i}^* & \xrightarrow{\phi_{a_i}} & D^* \\
p' \downarrow & & \downarrow p_{a_i} \\
U_a^* & \xrightarrow{\psi_a} & D^*
\end{array}$$

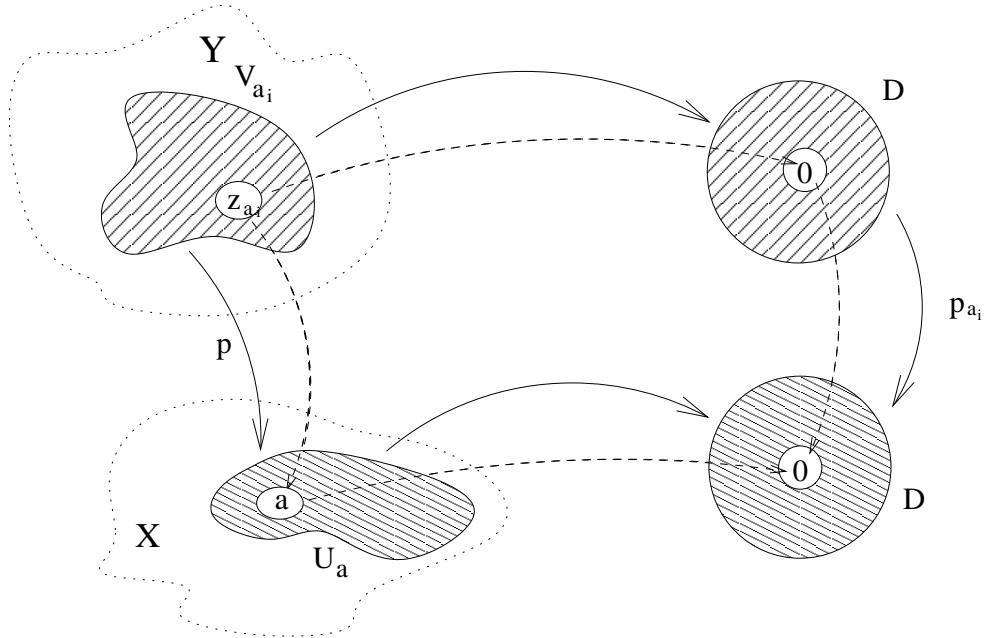
On choisit à présent des points  $z_{a_i}$ , pour  $a \in A$ ,  $i = 1 \dots n(a)$  d'un ensemble  $Z$  tel que  $Y' \cap Z = \emptyset$ .

On pose alors  $Y := Y' \cup \{z_{a_i} | a \in A, i = 1 \dots n(a)\}$ . On peut munir cet ensemble d'une topologie : Si  $(W_i)_{i \in I}$  est une base de voisinages de  $a$ , alors  $\{z_{a_i}\} \cup (p'^{-1}(W_i) \cap V_{a_i}^*)$  est une base de voisinage de  $z_{a_i}$ . On construit ainsi une topologie telle que  $Y$  soit un espace séparé.

Par la suite, on définit l'application  $p : Y \rightarrow X$  en posant  $p(y) = p'(y)$  pour tout  $y \in Y'$  et  $p(z_{a_i}) = a$ . L'application  $p$  est alors propre.

Nous voudrions maintenant munir  $Y$  d'une structure de surface de Riemann. Pour cela, nous définissons des cartes complexes en prolongeant les cartes  $\psi_a : V_{a_i}^* \rightarrow D^*$  sur  $V_{a_i} := V_{a_i}^* \cup \{z_{a_i}\}$  en posant  $\psi_a(z_{a_i}) := 0$ . Ces nouvelles cartes  $\psi_a : V_{a_i} \rightarrow D$  sont holomorphiquement compatibles avec les cartes de  $Y'$ .

Le dessin ci-dessous résume les différents prolongements effectués :



L'application  $p : Y \rightarrow X$  est alors holomorphe. De plus, puisque  $Y \setminus p^{-1}(A) = Y'$  il suffit de poser  $\phi := Id_{Y'}$  pour avoir l'application biholomorphe souhaitée.

□

La proposition suivante vient compléter ce théorème :

**Proposition 5.0.4.** *Soient  $X, Y, Z$  trois surfaces de Riemann et  $p : Y \rightarrow X, q : Z \rightarrow X$  deux revêtements propres holomorphes. Soit  $A \subset X$  un sous-ensemble fermé discret, et soit  $X' := X \setminus A, Y' := p^{-1}(X')$  et  $Z' := q^{-1}(X')$ . Alors toute application biholomorphe  $\sigma' : Y' \rightarrow Z'$  telle que  $q|_{Z'} \circ \sigma' = p|_{Y'}$  peut être prolongée en une application biholomorphe  $\sigma : Y \rightarrow Z$  telle que  $q \circ \sigma = p$ .*

*En particulier, tout élément de  $\text{Aut}(Y')$  peut être prolongé en un élément de  $\text{Aut}(Y)$ .*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.8.5.

Cette proposition assure donc l'unicité du prolongement du revêtement  $p' : Y' \rightarrow X'$  vu dans le théorème 5.0.3, à isomorphisme près.

**Définition 5.0.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann, et  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement holomorphe ramifié. Soit  $A \subset X$  l'ensemble des valeurs critiques de  $p$ , et soit  $X' := X \setminus A$  et  $Y' := p^{-1}(X')$ .*

*On dit que le revêtement  $p : Y \rightarrow X$  est **galoisien de groupe  $G$**  si le revêtement  $p|_{Y'} : Y' \rightarrow X'$  est galoisien de groupe  $G$ .*

Remarquons à présent l'intérêt du théorème 5.0.3 pour notre problème : Rappelons que l'on souhaite construire un revêtement de  $\mathbb{P}^1$  de groupe de galois  $G$  fixé engendré par  $n$  éléments.

La sphère de Riemann privée de  $n + 1$  points,  $X := \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$  est homéomorphe au plan complexe privé de  $n$  points  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  (il suffit d'identifier l'un des points  $p_i$  à  $\infty$ ).

$X$  a donc pour groupe fondamental le groupe libre à  $n$  éléments  $F := F_{\{a_1, \dots, a_n\}}$ .

On choisit alors un revêtement universel propre holomorphe de  $X, p : \tilde{X} \rightarrow X$  qui admettra donc  $F$  pour groupe d'automorphismes.

Par ailleurs si l'on se donne un morphisme surjectif  $\phi : F \rightarrow G$  (un tel morphisme existe, il suffit d'envoyer les générateurs de  $F$  sur les générateurs de  $G$ ), on a alors  $G \simeq F/H$  où  $H := \ker \phi$ .

Si l'on considère le revêtement associé  $q_H : Y' \rightarrow X$ , où  $Y' := \tilde{X}/H$ , ce revêtement est alors propre holomorphe non ramifié et galoisien (car  $H = \ker \phi$  est distingué dans  $F$ ) de groupe  $F/H \simeq G$ .

Mais D'après le théorème 5.0.3, on peut prolonger  $q_H : Y' \rightarrow X$  en un

revêtement ramifié de  $\mathbb{P}^1$ ,  $q_H : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ , qui sera alors galoisien de groupe  $G$ .

Nous pouvons donc assurer l'existence d'un revêtement galoisien de groupe  $G$  de type fini donné.

Comment pouvons-nous en déduire l'existence d'une extension galoisienne de  $\mathbb{C}(T)$  de groupe  $G$ ?

C'est l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 6

## Correspondance revêtements/extensions

### 6.1 Fonctions algébriques

Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann,  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement holomorphe non ramifié à  $n$  feuillets et  $f$  une fonction méromorphe sur  $Y$ . d'après la proposition 2.1.1, tout point  $x \in X$  admet un voisinage  $V$  tel qu'il existe une famille non vide de sections au-dessus de  $V$ ,  $(s_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  telles que pour tout  $i \in I$ ,  $s_i(V)$  est un ouvert de  $p^{-1}(V)$  que l'on notera  $U_i$ ,  $U_i \cap U_j = \emptyset$ , et  $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} U_i$ .  $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  est alors holomorphe pour tout  $i$ . On note alors  $f_i := f \circ s_i$ .

Considérons alors le polynôme :

$$\prod_{i=1}^n (T - f_i) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n \in \mathcal{M}(U)[X]$$

Les  $c_i$  étant des fonctions méromorphes sur  $U$  et on a alors  $c_i = (-1)^i \sigma_i(f_1, \dots, f_n)$ , où les  $\sigma_i$  sont les polynômes symétriques élémentaires en  $n$  variables.

Par le même procédé on construit les fonctions  $c_i$  sur des voisinages de tous les points  $x \in X$ , et on peut alors définir les fonctions  $c_i$  méromorphes sur  $X$ .

On les appelle les **fonctions symétriques élémentaires** de  $f$  pour le revêtement  $p : Y \rightarrow X$ .

**Proposition 6.1.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann, et  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement holomorphe ramifié à  $n$  feuillets.*

*Soit  $A \subset X$  un ensemble fermé discret contenant toutes les valeurs critiques de  $p$ , et soit  $B = p^{-1}(A)$ .*

*Supposons que  $p$  est une fonction holomorphe sur  $Y \setminus B$  et que les fonctions  $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{O}(X \setminus A)$  sont les fonctions symétriques élémentaires de  $f$ .*

*Alors,  $f$  peut être prolongée en une fonction holomorphe sur  $Y$  si et seulement si toutes les fonctions  $c_i$  peuvent être prolongées en des fonctions holomorphes sur  $X$ .*

*Démonstration.* Soit  $a \in A$  et  $\{b_1, \dots, b_n\} := p^{-1}(a)$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert relativement compact de  $a$  tel que  $U \cap A = \{a\}$  et  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  une carte complexe sur  $X$ , telle que  $\phi(a) = 0$ .  $V := p^{-1}(U)$  est un voisinage ouvert relativement compact de chacun des  $b_i$ .

- Supposons que  $f$  peut être prolongée holomorphiquement en tout point  $b_i$ .  $f$  est alors bornée sur  $V \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$ . Les  $c_i$  sont donc bornées sur  $U \setminus \{a\}$ . Donc, par le théorème des singularités de Riemann, les  $c_i$  peuvent être prolongées holomorphiquement en  $a$ .
- Supposons que les  $c_i$  peuvent être prolongées holomorphiquement en  $a$ . Toutes les fonctions  $c_i$  sont alors bornées sur  $U \setminus \{a\}$ . Mais ceci implique que  $f$  est bornée sur  $V \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$ , car si  $x = p(y)$  alors  $f(y)^n + c_1(x)f(y)^{n-1} + \dots + c_n(x) = 0$ . D'après le théorème des singularités de Riemann,  $f$  peut être prolongée holomorphiquement en chaque  $b_i$ .

□

Signalons que nous avons un résultat analogue pour les fonctions méromorphes:

**Proposition 6.1.2.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann, et  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement holomorphe ramifié à  $n$  feuillets.*

*Soit  $A \subset X$  un ensemble fermé discret contenant toutes les valeurs critiques de  $p$ , et soit  $B = p^{-1}(A)$ .*

*Si on suppose  $f$  holomorphe sur  $Y \setminus B$  et  $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(X \setminus A)$ .*

*Alors  $f$  peut être prolongée méromorphiquement sur  $Y$  si et seulement si les  $c_i$  peuvent être prolongées méromorphiquement sur  $X$ .*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.8.2.

Nous allons à présent voir apparaître un lien entre les revêtements de surfaces de Riemann et l'algèbre des fonctions méromorphes. Soit  $p : Y \rightarrow X$  une application holomorphe non constante. Considérons alors  $p^* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ ,

$f \mapsto f \circ p$ . Il est facile de voir que cette application est bien définie et que c'est un morphisme de corps. Le morphisme  $p^* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$  permet alors de munir  $\mathcal{M}(Y)$  d'une structure de  $\mathcal{M}(X)$ -algèbre. De plus,  $\mathcal{M}(Y)$  étant un corps, c'est une extension de  $\mathcal{M}(X)$

Ce morphisme est particulièrement intéressant dans le cas où  $p$  est un revêtement:

Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann et  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement holomorphe ramifié à  $n$  feuillets. Si  $f \in \mathcal{M}(Y)$  et si  $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(X)$  sont les fonctions symétriques élémentaires associées à  $f$ , alors  $f^n + (p^*c_1)f^{n-1} + \dots + (p^*c_n) = 0$  (d'après la définition des fonctions symétriques élémentaires). Par conséquent toute fonction  $f \in \mathcal{M}(Y)$  est un élément algébrique sur  $K := p^*(\mathcal{M}(X))$ . Par conséquent,  $\mathcal{M}(Y)$  est une extension algébrique de  $K$  et tout élément de  $\mathcal{M}(Y)$  est de degré  $\leq n$ . (Par la suite, on identifiera  $K$  à  $\mathcal{M}(X)$  via le morphisme  $p^* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ .)

On a de plus le résultat suivant :

**Proposition 6.1.3.** *On a  $[\mathcal{M}(Y) : K] \leq n$ .*

*Par ailleurs, s'il existe  $f \in \mathcal{M}(Y)$  et  $x \in X$  avec  $\{y_1, \dots, y_n\} := p^{-1}(x)$  tels que les  $f(y_i)$  pour  $i = 1 \dots n$  sont tous distincts, alors l'extension  $\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)$  est de degré exactement  $n$ .*

*Démonstration.* Posons  $L := \mathcal{M}(Y)$ . Considérons  $f_0 \in L$  un élément de degré maximal  $n_0 \leq n$  sur  $K$ .

Soit  $f \in L$  quelconque. Par le théorème de l'élément primitif, il existe  $g \in L$  tel que  $K(g) = K(f, f_0)$ . Par définition de  $n_0$ , on a  $[K(g) : K] \leq n_0$ , mais par ailleurs,  $K(f_0) \subset K(f, f_0)$  donc  $n_0 \leq [K(f, f_0) : K]$ . D'où finalement,  $K(f_0, f) = K(f_0)$  et donc  $f \in K(f_0)$  pour tout  $f \in L$ .

Par conséquent,  $L = K(f_0)$  et donc  $[L : K] = n_0 \leq n$ .

D'autre part, le polynôme minimal de  $f$  est de degré  $n_0$ , on le note  $P = T^{n_0} + p^*a_{n_0-1}T^{n_0-1} + \dots + p^*a_0 \in K[T]$ . Si  $x \in X$ , et  $\{y_1, \dots, y_n\} := p^{-1}(x)$  alors pour tout  $i$  :  $P(f(y_i)) = f(y_i)^{n_0} + (a_{n_0-1}(x))f(y_i)^{n_0-1} + \dots + (a_0(x))$ . Donc les  $f(y_i)$  sont racines d'un même polynôme de degré  $n_0 \leq n$ . Donc  $f(y_i)$  peut prendre au plus  $n_0$  valeurs distinctes.

D'où, si les  $f(y_i)$  sont tous distincts, alors  $n = n_0$ .

□

On commence à comprendre qu'une correspondance entre les revêtement d'une surface de Riemann  $X$  et les extensions de  $\mathcal{M}(X)$  sera donnée par l'application : (revêtement holomorphe ramifié  $p : Y \rightarrow X$ )  $\longmapsto$  (extension  $\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)$ ).



Nous allons à présent introduire le concept de fonction algébrique :

**Théorème 6.1.4.** *Soit  $X$  une surface de Riemann, et  $P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n$  un polynôme irréductible de degré  $n$ .*

*Il existe une surface de Riemann  $Y$ , un revêtement ramifié holomorphe à  $n$  feuillets  $p : Y \rightarrow X$  et une fonction méromorphe  $F \in \mathcal{M}(Y)$  telle que  $(p^*P)(F) = 0$ . Le triplet  $(Y, p, F)$  est alors unique au sens où, si  $(Z, q, G)$  est un autre triplet satisfaisant les mêmes propriétés, alors il existe une unique application biholomorphe  $\sigma : Z \rightarrow Y$  telle que  $q = p \circ \sigma$  et  $G = \sigma^*F$ .*

*On dit que le triplet  $(Y, p, F)$  est une **fonction algébrique** définie par le polynôme  $P(T)$ .*

*Démonstration.* Voir [F].Chapitre1.8.9.

## 6.2 Correspondance

Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann et  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement holomorphe ramifié de  $X$  et posons :

$\forall \sigma \in \text{Aut}(Y), \forall f \in \mathcal{M}(Y) \sigma f := f \circ \sigma^{-1} \in \mathcal{M}(Y)$ . On a alors une correspondance entre  $\text{Aut}(Y)$  et  $G_{\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)}$  donnée par :

$$\phi : \text{Aut}(Y) \rightarrow G_{\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)}$$

$$\sigma \mapsto (f \mapsto \sigma f)$$

Cette application est bien définie car  $f \mapsto \sigma f$  est bien un automorphisme de  $\mathcal{M}(Y)$  (de réciproque  $f \mapsto \sigma^{-1}f$ ) laissant  $K = p^*\mathcal{M}(X)$  invariant.

Par ailleurs, il est immédiat que  $\phi$  est un morphisme de groupe.

On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 6.2.1.** *Soit  $X$  une surface de Riemann. On pose  $K := \mathcal{M}(X)$  et  $P(T)$  un polynôme irréductible unitaire de degré  $n$ . Soit  $(Y, p, F)$  la fonction algébrique définie par  $P(T)$  et  $L := \mathcal{M}(Y)$ . On considère  $K$  comme un sous-corps de  $L$ .*

- $L/K$  est alors une extension de degré  $n$  de  $K$ , et on a  $L \simeq K[T]/(P(T))$ .
- De plus, le morphisme  $\phi : \text{Aut}(Y) \rightarrow G_{L/K}$ ,  $\sigma \mapsto (f \mapsto \sigma f)$  est un isomorphisme de groupes.
- Le revêtement  $Y \rightarrow X$  est alors galoisien si et seulement si l'extension  $L/K$  est galoisienne.

*Démonstration.*

- D'après la proposition 6.1.3, on a bien  $[L : K] = n$ .
- L'isomorphisme  $L \simeq K[T]/(P(T))$  est clair, puisque  $\deg(P) = n$  et  $P(F) = 0$ , et  $F$  est un élément primitif de  $L$  (cf. démonstration de la proposition 6.1.3).
- L'application  $\phi$  est injective : en effet, soit  $\sigma \in \text{Aut}(Y)$ , telle que  $\sigma f = f$  pour tout  $f \in L$ . On a alors  $\sigma F = F$ , c'est-à-dire  $(\sigma^{-1})^* F = F$ . Or d'après le théorème 6.1.4,  $\text{Id}_L$  est l'unique application biholomorphe telle que  $(\sigma^{-1})^* F = F$ . Donc  $\sigma = \text{Id}_L$ .
- L'application  $\phi$  est surjective : soit  $\alpha \in G_{L/K}$ ,  $(Y, p, \alpha F)$  est une fonction algébrique définie par le polynôme  $P(T)$ . Donc il existe  $\tau \in \text{Aut}(Y)$  tel que  $\alpha F = \tau^* F = \tau^{-1} F$ . Puisque  $F$  engendrent  $L$ , le morphisme  $f \mapsto \tau^{-1} f$  est le morphisme  $\alpha$ .
- Enfin,  $p : Y \rightarrow X$  est galoisien si et seulement si  $\text{Aut}(Y)$  contient  $n$  éléments (car l'action de  $\text{Aut}(Y)$  sur les fibres est alors transitive). Et de même l'extension  $G_{L/K}$  est galoisienne si et seulement si  $G_{L/K}$  contient  $[L : K] = n$  éléments.

□

## 6.3 Application à la sphère de Riemann

A la fin du chapitre 5 les revêtements galoisiens  $q_H : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  que nous avons construit, nous donnent donc, par cette correspondance, des extensions galoisiennes de  $K := \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ .

Rappelons que nous avons construit ces revêtements à partir d'un revêtement universel de la sphère de Riemann privée de  $n + 1$  points.

Voici quelques exemples de tels revêtements universels :

**Exemple 6.3.1.** • *La sphère de Riemann privée de 2 points  $\mathbb{P}^1 \setminus \{z_1, z_2\}$  qui est homéomorphe (et même biholomorphe) à  $\mathbb{C}^*$  (il suffit d'identifier  $z_1$  à  $\infty$  et  $z_2$  à 0). Un revêtement universel de cet espace est alors donné par  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto e^{2i\pi z}$ .*

- *Pour la sphère de Riemann privée de 3 points, c'est plus compliqué : On se ramène avant tout au cas de la sphère de Riemann privée des points 0, 1, et  $\infty$ . On considère alors un tore  $\mathbb{C}/w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$ , que l'on peut ramener, par isomorphisme à un tore  $T_\tau := \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ , avec*

$\tau \in P$ , où  $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  est le demi-plan de Poincaré. On définit la fonction  $\wp : T_\tau \rightarrow \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$  de Weierstrass sur  $T_\tau$  (on rappelle que  $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$ ). Cette fonction est doublement périodique de périodes 1 et  $\tau$ . On note alors  $e_1(\tau) := \wp(\frac{1}{2})$ ,  $e_2(\tau) := \wp(\frac{1}{2}(1+\tau))$ , et  $e_3(\tau) := \wp(\frac{1}{2}\tau)$ , les valeurs de  $\wp$  en chaque demi-période. L'application  $\lambda : P \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ ,  $\tau \mapsto \frac{e_2(\tau) - e_3(\tau)}{e_1(\tau) - e_3(\tau)}$  est alors un revêtement universel de  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  (pour plus de détails, voir [L]).

**Proposition 6.3.1.** *Toute fonction méromorphe sur  $\mathbb{P}^1$  est rationnelle.*

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ . Nous allons d'abord montrer que  $f$  admet un nombre fini de pôles :

Supposons que  $f$  admet une infinité de pôles. On peut alors construire une suite de pôles  $(z_i)$  qui converge dans  $\mathbb{P}^1$  (car  $\mathbb{P}^1$  est compact). Donc par le théorème 4.1.1,  $f$  est identiquement égale à  $\infty$ , d'où contradiction.

On peut à présent supposer que  $\infty$  n'est pas un pôle de  $f$ . (si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer  $f$  par  $1/f$ )

Notons alors  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  les pôles de  $f$ , et pour chaque pôle  $a_i$ , on choisit une carte complexe  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  définie sur un voisinage ouvert  $U_i$  de  $a_i$ . On peut alors effectuer un développement en série de Laurent de  $f \circ \phi_i$  au voisinage de  $a_i$ . On note alors  $h_i(z) = \sum_{j=-k_i}^{-1} c_{ij}(z - a_i)^j$  la partie principale de ce développement.

La fonction  $g := f - (h_1 \circ \phi_1^{-1} + \dots + h_n \circ \phi_n^{-1})$  est alors holomorphe sur  $\mathbb{P}^1$ . Elle est donc constante d'après le corollaire 4.1.9.

On en déduit donc que  $f$  est rationnelle. □

**Remarque 6.3.1.** *Cette proposition est une conséquence du fait suivant :*

- *En général une surface de Riemann compact se plonge dans un espace projectif.*
- *D'après le théorème de Chow, toute sous-variété analytique d'un espace projectif est algébrique (pour plus de détails voir [GH] ou [Si])*

Par conséquent  $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$  se plonge dans  $\mathbb{C}(T)$ . Réciproquement, il est clair que  $\mathbb{C}(T)$  se plonge dans  $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ .

On a donc que  $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{C}(T)$ . On a donc bien obtenu le théorème :

**Théorème 6.3.2.** *Pour tout groupe  $G$  de type fini donné, il existe une extension galoisienne de  $\mathbb{C}(T)$  de groupe de Galois  $G$ .*

Voici un exemple d'application :

**Exemple 6.3.2.** Posons  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  le groupe cyclique d'ordre  $n$  (engendré par un élément).

On considère alors la sphère de Riemann privée de 2 points  $\mathbb{P}^1 \setminus \{z_1, z_2\}$  qui est homéomorphe à  $\mathbb{C}^*$ . Rappelons le revêtement universel de  $\mathbb{C}^*$  donné par  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^{2i\pi z}$ .

On considère alors le revêtement donné par  $q_{n\mathbb{Z}} : \mathbb{C}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*, [z] \mapsto e^{\frac{2i\pi z}{n}}$ .

On a alors  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/n\mathbb{Z})$  est une extension de  $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{C}(t)$ .

Or  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}(\sqrt[n]{t})$ , ( Si  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\mathbb{Z})$  et  $g \in \mathbb{C}(t)$  telle que  $f([z]) = g(e^{2i\pi z})$ , on associe à  $f$  la fonction  $h : z \mapsto g(e^{\frac{2i\pi z}{n}})$ ).

Une extension galoisienne de  $\mathbb{C}(t)$  de groupe de Galois  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est alors donnée par  $\mathbb{C}(\sqrt[n]{t})$ .

# Annexe A

## Liste des groupes fondamentaux

### A.1 Groupe fondamental des espaces topologiques familiers :

Espace topologique	Groupe fondamental
$\mathbb{R}^n$	$\{1\}$
$\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$	$F_{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}$
$S^1$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{T}^n$	$\mathbb{Z}^n$
$S^n, n \geq 2$	$\{1\}$
$\mathbb{P}^n \mathbb{C}, n \geq 1$	$\{1\}$
$\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{P}^n \mathbb{R}, n \geq 2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Tore privé de $n$ points	$\langle a, b, c_1, c_2, \dots, c_n \mid [a, b]c_1c_2\dots c_n = 1 \rangle$
Surface de genre $g$ privée de $n$ points	$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_n \mid [a_1, b_1][a_2, b_2]\dots[a_g, b_g]c_1\dots c_n = 1 \rangle$
Bouteille de Klein	$\langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$

## A.2 Groupe fondamental des groupes classiques :

Groupe Classique	Groupe fondamental
$O_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}$
$O_n(\mathbb{R}), n \geq 3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$SO_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}$
$SO_n(\mathbb{R}), n \geq 3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$U_n(\mathbb{C}), n \geq 1$	$\mathbb{Z}$
$Sp(n)$	$\{1\}$
$SU_n(\mathbb{C})$	$\{1\}$
$GL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}$
$GL_n(\mathbb{R}), n \geq 3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$GL_n(\mathbb{C}), n \geq 1$	$\mathbb{Z}$
$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}$
$SL_n(\mathbb{R}), n \geq 3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$SL_n(\mathbb{C})$	$\{1\}$
$Sp_n(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}$
$Sp_n(\mathbb{C})$	$\{1\}$
$O_2(\mathbb{C})$	$\mathbb{Z}$
$O_n(\mathbb{C}), n \geq 3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$O_{2,2}(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$O_{2,q}(\mathbb{R}), q \geq 3$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$O_{p,2}(\mathbb{R}), p \geq 3$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$O_{p,q}(\mathbb{R}), p \geq 3, q \geq 3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$U_{p,q}(\mathbb{C})$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

# Références bibliographiques

- [F] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **81**, New York, Springer, (1981).
- [G] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*. Paris, Hermann, (1971).
- [GH] P. Griffiths, J. Harris *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Library, (1994).
- [L] K. Lamotke, *Riemannsche Flächen*, 2<sup>ème</sup> édition Springer,(2009).
- [M] R. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie Classiques*. Paris, Hermann, (1986).
- [S] J. P. Serre, *Groupes de Galois sur  $\mathbb{Q}$* , Séminaire Bourbaki n° 689, (1987-1988).
- [Si] J. C. Sikorav *Surfaces de Riemann*, M1 Mathématiques approfondies, second semestre 2010-2011
- [Sp] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Corrected reprint, Springer, (1981).

# Remerciements

Merci à M. Kenji Iohara pour tout le temps qu'il a accepté de me consacrer, pour sa patience, pour sa bienveillance, et pour ses précieux conseils. Merci à M. Philippe Caldero pour ses conseils avisés pour l'année prochaine et pour avoir suivi de près l'évolution de ce travail encadré de recherche. Merci à mes parents et à mes sœurs pour leurs encouragements et leurs témoignages d'affection tout au long de mes études. Merci à Mireille pour avoir tout fait pour assister à ma présentation orale. Merci également à Abdel pour avoir bien voulu partager avec moi ses expériences de son année de Master 1. Merci aussi à Mme. Alessandra Frabetti, à M. Alexis Tchoudjem et à M. Serge Parmentier pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Merci enfin à tous mes condisciples aux côtés desquels j'ai passé une année particulièrement agréable et riche en échanges.