GT Lie/Symplectique
Printemps 2010
S.P.

Moment à valeurs dans un groupe et groupe fondamental de surfaces.

Voici les sources:

(1) Alekseev, Malkin, Meinrenken: *Lie Group valued Moment Maps.* J. Differential Geometry 48 (1998), 445-495.

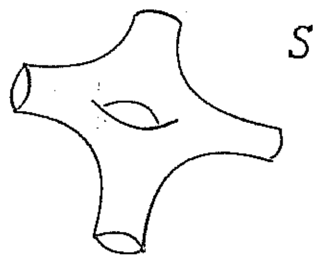
(2) Alekseev, Kosmann-Schwarzbach: *Manin Pairs and Moment Maps.* J. Differential Geometry 56 (2000), 133-165.

(3) Alekseev, Kosmann-Schwarzbach, Meinrenken: *Quasi-Poisson Manifolds.* Canadian J. Math. Vol 54 (1), 2002 pp. 3-29.

Dans cet exposé, j'utilise principalement (une partie de) l'article (3). C'est le plus simple et le plus direct.

Question principale

Soit S_0 une surface connexe compacte orientable de genre g (une sphère à g anses) et S la surface obtenue à partir de S_0 en y découpant r disques fermés:



Comment définir naturellement une structure de Poisson sur la partie lisse de l'espace $Hom(\pi_1(S), G)/G$?

Ici $\pi_1(S)$ est le groupe fondamental de S, G est un groupe de Lie compact et l'action de G sur $Hom(\pi_1(S), G)$ est par conjugaison: pour un morphisme $\phi : \pi_1(S) \to G$ on a $(g \cdot \phi)(a) = g\phi(a)g^{-1}$, $g \in G$.

Présentation de $\pi_1(S)$

Je rappelle ici comment obtenir la présentation standard du groupe $\pi_1(S)$ par recollement.

Voici un texte excellent et très accessible sur ces questions:

- W. Fulton: *Algebraic Topology. A First Course.* Graduate Texts in Math. 153. Springer.

Soit $D = \{z, | z |< 1\} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, $D_{-n} = D \setminus \{z_1, z_2, \ldots z_n\}$ le disque privé de n points $z_i \in D$.

On a $\pi_1(D) = \{\overline{0}\}$ où $\overline{0}$ est la classe du lacet constant $a(t) = 0, t \in [0,1]$.

Le morphisme de revêtement universel $\mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\} : z \mapsto exp(z)$ étant de noyau $2\pi i\mathbf{Z}$, on a $\pi_1(D_{-1}) \simeq \mathbf{Z}$. C'est le groupe libre $\langle \overline{b_1} \rangle$ de générateur la classe du lacet b_1 de D_{-1}:

1. Le théorème de Seifert Van Kampen. (cf Fulton page 197-199)

Supposons que l'espace topologique $X = U \cup V$ soit réunion de deux ouverts U, V avec $U, V, U \cap V$ connexes par arcs et que $X, U, V, U \cap V$ admettent un revêtement universel (c'est le cas des variétés topologiques usuelles i.e. modelées sur $\mathbf{R}^n$). Fixons $x \in U \cap V$.

Alors $\pi_1(X,x)$ est caractérisé (à isomorphisme près) par la propriété universelle suivante: pour tout groupe G et toute paire de morphismes

$$h_U : \pi_1(U,x) \to G, \quad h_V : \pi_1(V,x) \to G,$$

il existe un unique morphisme

$$h : \pi_1(X,x) \to G$$

tel que le diagramme

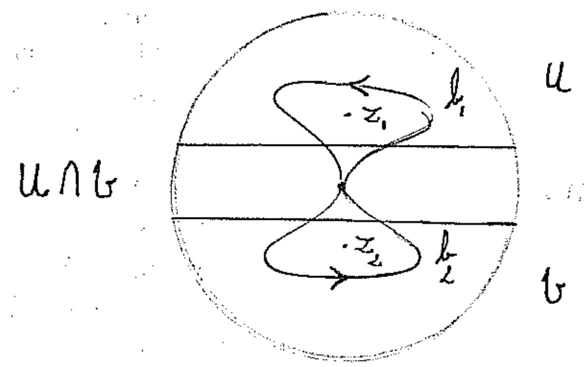
$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x) \arrow[dr] \arrow[drr, "h_U"] & & \\
\pi_1(U \cap V, x) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_1(X,x) \arrow[r, "h"] & G \\
 & \pi_1(V,x) \arrow[ur] \arrow[urr, "h_V"'] & &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Ici la flèche $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ est le morphisme de groupes induit par l' inclusion $U \to X$.

En particulier, $\pi_1(X,x)$ est engendré par $\pi_1(U,x)$ et $\pi_1(V,x)$. Lorsque $\pi_1(U \cap V)$ est trivial, $\pi_1(X,x)$ est (par définition) le *produit libre* $\pi_1(U,x) \star \pi_2(V,x)$.

2. Bouquet de n cercles.

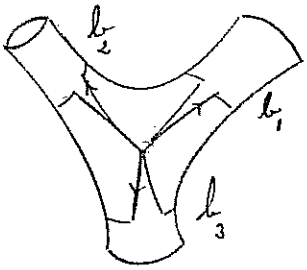
Appliqué à D_{-2} ceci donne:

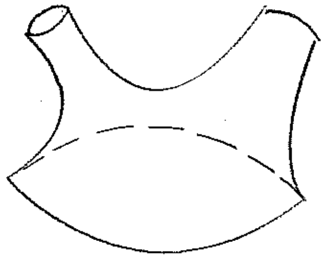


Le groupe $\pi_1(D_{-2})$ est le groupe libre $\langle \overline{b_1}, \overline{b_2} \rangle$ de générateurs les classes des lacets b_1, b_2 (bouquet de deux cercles).

De même, $\pi_1(D_{-n})$ est le groupe libre engendré par les classes du bouquet de n cercles.

En déformant la sphère privée de n disques S^2_{-n} comme suit:





on voit que $\pi_1(S^2_{-n}) = \pi_1(D_{-(n-1)})$ que l'on peut présenter par

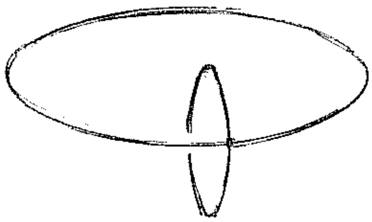
$$\pi_1(S^2_{-n}) = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n,\ b_1 b_2 \ldots b_n = 1 \rangle.$$

(J'utilise la même notation pour *lacet* et *classe de lacets.*)

3. Groupe fondamental de S.

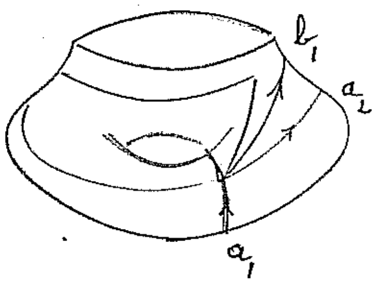
- Le tore privé d'un disque.

Après excision d'un disque et déformation on se ramène à la figure



On a donc $\pi_1(S^1 \times S^1 \setminus D) = \pi_1(D_{-2})$ i.e. c'est le groupe libre de générateurs les classes des lacets a_1 et a_2. On peut (cf figure) le présenter comme suit:

$$\pi_1(S^1 \times S^1 \setminus D) = \langle a_1, a_2, b_1,\ a_1\, a_2\, a_1{}^{-1} a_2{}^{-1} b_1 = 1 \rangle.$$



- Le tore.

Le revêtement universel

$$\mathbf{R}^2 \to S^1 \times S^1 : (t, s) \mapsto (exp(2\pi i t), exp(2\pi i s))$$

donne $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbf{Z}^2$ que l'on présente par

$$\pi_1(S^1 \times S^1) = \langle a_1, a_2,\ a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} = 1 \rangle.$$

(Cette présentation s'obtient aussi par Seifert Van Kampen en prenant $U = S^1 \times S^1 \setminus \overline{D}$ et $V = D'$ un disque ouvert contenant strictement le disque fermé $\overline{D}$. Par ce qui précède, $\pi_1(U)$ est un groupe libre, $\pi_1(V)$ est trivial et $U \cap V$ étant une couronne, on a $\pi_1(U \cap V) = \mathbf{Z}$.)

En procédant par recollement successif on obtient la présentation standard

$$\pi_1(S) = \langle a_1, a_2, \dots, a_{2g-1}, a_{2g}, b_1, \dots, b_r,\ [a_1, a_2][a_3, a_4] \cdots [a_{2g-1}, a_{2g}] b_1 b_2 \cdots b_r = 1 \rangle$$

où $[a, a'] = a\, a'\, a^{-1}\, {a'}^{-1}$ est le commutateur.

Moment

Je rappelle ici la notion usuelle de moment en géométrie symplectique ou Poissonienne.

Soit (M, P) une variété de Poisson (i.e. P est un bivecteur sur M tel que le crochet $\{f, g\} = P(df, dg)$ sur $C^\infty(M)$ soit un crochet de Lie) et une action

$$\psi : G \times M \to M : (g, m) \mapsto g \cdot m$$

préservant le bivecteur P. On appelle moment toute application

$$j : M \to \mathbf{g}^\star$$

équivariante (i.e. $j(g \cdot m) = Ad^\star_{g^{-1}} j(m)$) telle que pour tout $Z \in \mathbf{g}$,

$$P(dj^\star Z, \cdot) = Z^-.$$

Ici $Z^-(m) = \frac{d}{dt}_{|_0} exp(-tZ) \cdot m$ est le champ fondamental sur M associé à $Z \in \mathbf{g}$ et $dj^\star Z \in \Omega^1(M)$ est la 1- forme définie par $dj^\star Z(m)\, v = < d_m j\, v, Z >$, $v \in T_m M$ (on a utilisé $d_m j\, v \in T_{j(m)} \mathbf{g}^\star \simeq \mathbf{g}^\star$).

Voici les propriétés principales:

Soit $M_\star \subset M$ l'ouvert $G-$ invariant défini par $M_\star = \{m \in M,\ \text{Stab}\ (m) = \{1\}\}$. Supposons que l'action de G soit propre.

(1) Le quotient $M_\star/G$ est alors une variété lisse qui est de Poisson pour le crochet des fonctions $G-$ invariantes (c'est l'unique crochet sur $M_\star/G$ pour lequel la projection $p : M_\star \to M_\star/G$ satisfait $\{f, g\}_{M_\star/G} \circ p = \{f \circ p, g \circ p\}$).

(2) L'application moment $j : M_\star \to \mathbf{g}^\star$ est une submersion. En particulier, $j^{-1}(0) \cap M_\star$ est une sous-variété $G-$ stable de M. L'espace réduit $(j^{-1}(0) \cap M_\star)/G$ est aussi une variété de Poisson qui est une sous - variété de Poisson de $M_\star/G$.

On en tire une *idée directrice* pour définir des crochets de Poisson sur des espaces de modules d'objets:

Munir la variété M d'objets génériques d'une structure 'naturelle' de Poisson avec 'moment' $j : M \to N$ où N est une variété marquée par un point o, réaliser les équations satisfaites par les objets $m \in M$ qui nous concernent comme l' équation $j(m) = o$ et voir l'espace de modules comme un espace réduit $j^{-1}(o)/G$. De nombreux crochets intéressants sont apparus dans la littérature de cette manière (systèmes intégrables complexes comme quotients d'Hamiltoniens libres sur un espace symplectique, classification des variétés toriques par Delzant, nature symplectique du groupoide de Weinstein par Cattaneo - Felder et Crainic - Fernandes, crochet d'Atiyah - Bott sur l'espace des modules de connexions plates sur une surface,...). A ma connaissance il n'y a pas de *modus operandi* pour ces choses.

Ici les objets sont les représentations ρ de $\pi_1(S)$ dans un groupe compact G. Les équations satisfaites sont alors l'image dans G de l'unique relation de $\pi_1(S)$:
$Hom(\pi_1(S), G)$ est décrit par l'ensemble des $(A_1, \ldots, A_{2g}, B_1, \ldots, B_r) \in G^{2g+r}$ satisfaisant la relation

$$[A_1, A_2] \cdots [A_{2g-1}, A_{2g}] \cdot B_1 \cdots B_r = 1.$$

G^{2g+r} devrait donc jouer le rôle de M et l'application

$$j : G^{2g+r} \to G : (A_1, \ldots, B_r) \mapsto [A_1, A_2] \ldots [A_{2g-1}, A_{2g}] B_1 \ldots B_r$$

devrait jouer le rôle de l'application moment pour laquelle

$$j^{-1}(1)/G = Hom(\pi_1(S), G)/G.$$

Cet exemple est l'une des motivations principales pour développer une théorie du moment à valeur dans un groupe. Dans l'article (1) Alekseev, Malkin, Meinrenken font cette construction dans le cadre symplectique. Je suis ici leur construction Poissonienne présentée dans (3).

L'article (3)

Voici les notations de l'article (3):
G désigne un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ et $(\, , \,)$ est une forme bilinéaire invariante définie positive sur $\mathbf{g}$ (pour G connexe l'invariance équivaut à $([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) = 0$). On suppose que $\psi : G \times M \to M$ est une action et (cf plus haut) on note

$$\mathbf{g} \to \mathrm{Vec}(M) : Z \mapsto Z^-$$

le morphisme de Lie associé. Celui-ci se relève en un morphisme

$$\bigwedge \mathbf{g} \to \bigwedge Vec(M) : Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_n \mapsto Z_1^- \wedge \cdots \wedge Z_n^-$$

($\bigwedge Vec(M)$ désigne les multivecteurs sur M) qui est équivariant pour les actions naturelles

$$g \cdot (Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_n) = Ad_g Z_1 \wedge \cdots \wedge Ad_g Z_n$$
$$(g \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n))(m) = T_{g^{-1} \cdot m} \psi_g v_1(g^{-1} \cdot m) \wedge \cdots \wedge T_{g^{-1} \cdot m} \psi_g v_n(g^{-1} \cdot m)$$

et qui préserve le crochet de Schouten $[\, , \,]_s$.
Pour rappel: le crochet de Schouten sur $\bigwedge Vec(M)$ est le crochet de degré -1 défini par $[X, f]_s = X(f), [X, Y]_s = L_X(Y)$, pour tout $f \in C^\infty(M)$ et tous champs de vecteurs X, Y et pour tout triple de multivecteurs u, v, w (le degré de u est ici noté $| u |$):
$[u, v \wedge w]_s = [u, v]_s \wedge w + (-1)^{(|u|-1)|v|} v \wedge [u, w]_s$
$[u, v]_s = -(-1)^{(|u|-1)(|v|-1)} [v, u]_s$.
Ce crochet satisfait l' identité de Jacobi graduée suivante:
$[u, [v, w]_s]_s = [[u, v]_s, w]_s + (-1)^{(|u|-1)(|v|-1)} [v, [u, w]_s]_s$.

Le crochet de Schouten algébrique sur $\bigwedge \mathrm{g}$ est défini de manière analogue en demandant $[X, f]_s = 0$ pour tout $f \in K$ (le corps de base) et $[X, Y]_s = [X, Y]_{\mathrm{g}}$ pour tous $X, Y \in \mathrm{g}$.

On note (e_a) une base orthonormée de g et

$$\phi = \frac{1}{12} \sum f_{abc} e_a \wedge e_b \wedge e_c \in (\bigwedge^3 \mathrm{g})^{\mathrm{g}}$$

l'élément de Cartan ($f_{abc} = (e_a, [e_b, e_c])$). C'est le générateur en degré 3 de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de g. C'est aussi la trace semi-classique de l'associateur de Drinfel'd.

1. Variété quasi-Poisson

Une variété quasi-Poisson est un triple (M, P, G) où G agit sur la variété M en préservant le bivecteur $P \in \bigwedge^2 Vec(M)$ et

$$[P, P]_s = \phi^- = \frac{1}{12} \sum f_{abc} e_a^- \wedge e_b^- \wedge e_c^-.$$

Remarque: l'identité $[P, P]_s = 0$ est équivalente à l'identité de Jacobi pour le crochet $\{f, g\}_M = P(df, dg)$. La condition de la définition exprime donc la tolérance d'un défaut. Ce défaut est minimal car il s'annule sur les fonctions $G-$ invariantes, i.e. le quotient $M_\star/G$ sera bien une variété de Poisson.

On note $\theta^l, \theta^r \in \Omega^1(G, \mathrm{g})$ les formes canoniques définies par

$$\theta^l(v)(x) = T_x l_{x^{-1}} v, \quad \theta^r(v)(x) = T_x r_{x^{-1}} v, \quad v \in T_x G$$

et pour $Z \in \mathrm{g}$ on note Z^l, Z^r les champs invariants à gauche et à droite sur G donnés par $\theta^l(Z^l) = Z = \theta^r(Z^r)$.

2. Moment à valeurs dans un groupe

On appelle moment toute application $j : M \to G$ équivariante (i.e. $j(g \cdot m) = gj(m)g^{-1}$) telle que pour tout $Z \in \mathrm{g}$,

$$P(j^\star(\theta^r, Z), \cdot) = \frac{1}{2}\left((1 + Ad_{j(\cdot)^{-1}})Z\right)^-.$$

Voici la signification des termes:

$$< j^\star(\theta^r, Z)(m), v >= (\theta^r(d_m j\, v), Z), \quad v \in T_m M$$

et pour le champ de droite

$$m \mapsto \left((1 + Ad_{j(m)^{-1}})Z\right)^-(m).$$

Exemples

Voici les deux exemples qui interviennent pour la description de $Hom(\pi_1(S), G)$:

(1) $(M = G,\ P = \frac{1}{2} \sum_a e_a^r \wedge e_a^l,\ G)$ est quasi-Poisson pour l'action par conjugaison

$$G \times G \to G : (g, x) \mapsto gxg^{-1}.$$

Pour cette action, l'application identité $G \to G : x \mapsto x$ est un moment.

Remarque: Cet exemple est l'analogue de l'espace Hamiltonien usuel $g^\star \simeq g$ pour le crochet

$$\{f,g\}(z) = (z, [d_z f, d_z g]).$$

L'action de G étant ici l'action adjointe $G \times g \to g : (g,z) \mapsto Ad_g(z)$ et l'application moment l'identité de g.

En fait, c'est la dérivée de l'exemple 1 au sens où

$$P(1) = 0, \quad \frac{d}{dt}_{|0} P(df, dg)(e^{tZ}) = (Z, [d_1 f, d_1 g]).$$

(2) $(M = G \times G, P = \frac{1}{2}\sum(e_a^{1,l} \wedge e_a^{2,r} + e_a^{1,r} \wedge e_a^{2,l}, G \times G)$ pour l'action

$$(G \times G) \times (G \times G) \to G \times G : \big((g_1,g_2),(x_1,x_2)\big) \mapsto (g_1 x_1 g_2^{-1}, g_2 x_2 g_1^{-1}).$$

Cette action admet le moment

$$j : G \times G \to G \times G : (a_1,a_2) \mapsto (a_1 a_2, a_1^{-1} a_2^{-1}).$$

Dans l'expression de P, pour $Z \in g$, on a écrit $Z^1 = Z + 0, Z^2 = 0 + Z \in g \oplus g$.

3. Carrés et diagonales

Les moments des exemples 1 et 2 sont les facteurs de la relation de $\pi_1(S)$. Pour obtenir cette relation il reste à coller les facteurs par la multiplication de G. C'est le rôle de la fusion.

Remarque: La fusion est l'analogue multiplicatif de la propriété (évidente) suivante des espaces Hamiltoniens usuels: si $(M, P, G \times G)$ est Hamiltonien avec moment $j : M \to g^\star \times g^\star : m \mapsto (j_1(m), j_2(m))$ alors l'action de G sur M induite par le plongement diagonal $g \mapsto (g,g)$ est aussi Hamiltonienne avec moment $j_\delta : M \to g^\star : m \mapsto j_1(m) + j_2(m)$.

Supposons $(M, P, G \times G)$ quasi-Poisson avec moment $j : M \to G \times G : m \mapsto (j_1(m), j_2(m))$. Pour $\psi = \frac{1}{2}\sum e_a^1 \wedge e_a^2 \in \bigwedge^2(g \oplus g)$ notons

$$\psi_\star = \frac{1}{2}\sum e_a^{1-} \wedge e_a^{2-} \in \bigwedge^2 Vec(M).$$

Fusion

Pour l'action de G sur M induite par le plongement diagonal $g \mapsto (g,g)$ l'espace

$$(M, P_\star = P - \psi_\star, G)$$

est quasi-Poisson avec moment $j_\star : M \to G : m \mapsto j_1(m) j_2(m)$. On dit qu'on a effectué la *fusion* des facteurs de l'action de $G \times G$ sur M.

C' est associatif i.e. la fusion des facteurs d'une $G \times G \times G$ action sur M par (12)3 et 1(23) donnent la même structure quasi-Poisson.

4. Structure quasi-Poisson pour le groupe fondamental.

En notant $M_1 \star M_2$ la fusion du produit $(M_1 \times M_2, P_1 + P_2, G \times G, (j_1, j_2))$ de deux espaces quasi-Poisson (M_i, P_i, G) de moments j_i:

$$M_1 \star M_2 := (M_1 \times M_2, P_1 + P_2 - \psi_\star, G, j_\star = j_1(\cdot) j_2(\cdot))$$

et $\mathbf{D}G$ la fusion de l'exemple 2:

$$\mathbf{D}G = (G \times G, P - \psi_\star, G, j_\star = [\,,\,])$$

on obtient:

Le produit de fusion de $2g$ copies de $\mathbf{D}G$ et de r copies de G (quasi-Poisson de l' exemple 1)

$$\mathbf{D}G \star \cdots \star \mathbf{D}G \star G \star \cdots \star G$$

est un espace quasi-Poisson (la variété sous-jacente étant G^{2g+r}) dont le moment

$$j_\star(A_1, \ldots, A_{2g}, B_1, \ldots, B_r) = [A_1, A_2] \cdots [A_{2g-1}, A_{2g}] B_1 \cdots B_r$$

coincide avec l'unique relation de $\pi_1(S)$.

(Pour rappel: $[A, A'] = AA'A^{-1}A'^{-1}$ est le commutateur dans le groupe G.)

5. Quotient

Soit (M, P, G) quasi-Poisson avec G compact et moment $j : M \to G$. Comme plus haut soit $M_\star = \{m \in M,\ \mathrm{Stab}(m) = \{1\}\}$. Afin de passer au quotient on utilise le lemme suivant:

Lemme (régularité du moment)

L'application moment $j : M \to G$ est de rang maximal sur l'ouvert $M_\star$.

Démo: on veut montrer que pour tout $m \in M_\star$ l'application $d_m j : T_m M \to T_{j(m)} G$ est surjective. On montre que l'adjointe $(d_m j)^\star$ est injective. Pour commencer, on observe que si $\beta \in T^\star_{j(m)} G$ il existe un unique $Z_\beta \in \mathfrak{g}$ tel que $T_1^\star r_{j(m)} \beta = (Z_\beta, \cdot)$ et on a pour tout $W \in T_m M$,

$$< j^\star \beta(m), W > = < j^\star(\theta^r, Z_\beta)(m), W > .$$

Il suffit donc de montrer $j^\star(\theta^r, Z)(m) = 0 \Rightarrow Z = 0$.

Pour $Y \in \mathfrak{g}$ on a

$$\begin{aligned}
0 &= < j^\star(\theta^r, Z)(m), Y^-(m) > \\
&= (Z,\, T_{j(m)} r_{j(m)^{-1}}\, d_m j\, Y^-(m)) \\
&= (Z,\, T_{j(m)} r_{j(m)^{-1}}\, \frac{d}{dt}_{|0} j(e^{-tY} \cdot m)) \\
&= (Z,\, T_{j(m)} r_{j(m)^{-1}}\, \frac{d}{dt}_{|0} e^{-tY} j(m) e^{tY}) \quad \text{(par équivariance du moment)} \\
&= (Z,\, -Y + Ad_{j(m)} Y) \\
&= ((Ad_{j(m)^{-1}} - 1)Z, Y) \quad \text{(par invariance du produit scalaire).}
\end{aligned}$$

D'où $Ad_{j(m)}(Z) = Z$. La condition de moment donne alors

$$0 = P(j^\star(\theta^r, Z), \cdot)(m) = \frac{1}{2}((1 + Ad_{j(m)^{-1}})Z)^-(m) = Z^-(m).$$

Mais $Z^-(m) = 0$ équivaut à $Z \in \mathfrak{g}_m$ où $\mathfrak{g}_m$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur Stab (m) qui est trivial pour $m \in M_\star$. Conclusion $Z = 0$.

Le lemme implique que $j^{-1}(1) \cap M_\star$ est une sous-variété de M. G étant compact, le quotient $(j^{-1}(1) \cap M_\star)/G$ est une variété qui, de plus, est une sous-variété de Poisson du quotient $M_\star/G$.

Pour les représentations du groupe fondamental d'une surface, on obtient:

- *L'espace réduit*

$$\left(j_\star^{-1}(1) \cap \left(\mathbf{D}G \star \cdots \star \mathbf{D}G \star G \star \cdots \star G\right)_\star\right)/G \subset Hom(\pi_1(S), G)/G$$

est muni d'une structure de variété de Poisson, quotient de la structure quasi-Poisson sur G^{2g+r} *décrite au point* **4**.