FT-groupes

Eric Jaligot
Institut Girard Desargues
UPRES-A 5028 Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon-1
43 blvd du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne CEDEX, France
e-mail: jaligot@desargues.univ-lyon1.fr

January 14, 2000

1 Introduction.

Selon la conjecture de Cherlin-Zil'ber, un groupe simple infini de rang de Morley fini devrait être isomorphe, comme groupe abstrait, à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce préprint est dédié à l'étude d'une classe restreinte de groupes de rang de Morley fini qu'il convient de classifier :

Définition 1.1. – *On appelle FT-groupe tout groupe de rang de Morley fini connexe, non résoluble et dont les sous-groupes propres, définissables et connexes sont résolubles.*

Un FT-groupe simple G est un groupe de Frobenius complément-rempli avec pour complément de Frobenius un sous-groupe de Borel de G, ou bien a deux sous-groupes de Borel distincts avec une intersection infinie ([4], théorème 5.2). Devant la consistance et les propriétés algébriques bien déterminées du premier cas, les arguments d'analyse locale effectués ici ne concernent que le deuxième cas. Ce préprint contient un résultat très partiel, dans le but d'obtenir un jour une preuve d'une conjecture plus faible que la conjecture de Cherlin-Zil'ber :

Conjecture - *Un FT-groupe simple G est soit un groupe de Frobenius complément-rempli, avec pour complément de Frobenius un sous-groupe de*

Borel de G, soit isomorphe à $PSL_2(K)$ où K est un corps algébriquement clos.

Un tel groupe ne peut pas être de type mixte ([5]). S'il est de type pair, il est isomorphe à $PSL_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique 2 ([1], [6]). Il suffit donc de se concentrer sur les groupes de type dégénéré et impair. Le résultat principal ici concerne les groupes de type impair, bien qu'un lemme semble très interessant aussi pour l'étude des FT-groupes simples de type dégénéré (lemme 2.14 ci-dessous).

Pour énoncer le résultat, rappelons que dans un groupe de rang de Morley fini de type impair, avec un 2-sous-groupe de Sylow S, le 2-rang de Prüfer est l'entier n tel que

$$S^\circ \cong \oplus_{i=1}^n S_i$$

où chaque S_i est isomorphe au 2-groupe de Prüfer $\mathbb{Z}_{2^\infty}$.

Théorème 1.2. – *Soit G un FT-groupe simple, de type impair et de rang de Prüfer 1. Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G et i l'unique involution de S°. On suppose qu'il existe un sous-groupe de Borel B de G qui contient $C_G(i)^\circ$ et un sous-groupe B-minimal U de B tel que l'ensemble des éléments de $C_G(i)^\circ$ qui centralisent U soit fini. Alors $G \cong PSL_2(K)$ où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

La preuve de ce théorème consiste à adapter certains calculs de rang initiés par A. Nesin pour les CN-groupes de type pair.

2 Prérequis.

Toutes les notations concernant les groupes de rang de Morley fini sont celles de [2].

Fait 2.1. – **([2])** *Soient A et B deux ensembles interprétables d'un univers rangé. Alors $rg(A \times B) = rg(A) + rg(B)$ et $deg(A \times B) = deg(A)deg(B)$.*

Fait 2.2. – **([7])** *Soit σ un automorphisme involutif et définissable d'un groupe de rang de Morley fini G. Si σ ne fixe qu'un nombre fini de points, alors G a un sous-groupe définissable normal d'indice fini qui est abélien et inversé par σ.*

Fait 2.3. – **([11], théorème 2.4.7)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini résoluble avec un automorphisme définissable ϕ d'ordre p premier. Si*

$$\{h \in H \,:\, h\phi(h)...\phi^{p-1}(h) = 1\}$$

est générique pour tout sous-groupe H définissable et caractéristique de G, alors G est nilpotent-par-fini.

Corollaire 2.4. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini connnexe et résoluble avec un automorphisme définissable d'ordre premier et qui centralise un nombre fini d'éléments de G. Alors G est nilpotent.*

Preuve. – Si ϕ est l'automorphisme d'ordre premier p de G, il suffit de montrer que l'égalité $g\phi(g)...\phi^{p-1}(g) = 1$ est satisfaite génériquement par les sous-groupe définissables caractéristiques de G. Si H est un tel sous-groupe, alors l'application $h \longmapsto h\phi(h^{-1})$, de H dans H, a des fibres finies. Donc son image est générique dans H et les éléments de cette image satisfont l'identité ci-dessus. $\square$

Fait 2.5. – **([2], exercice 5, p. 98)** *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Si H est un sous-groupe normal infini de G, alors H contient une infinité d'éléments centraux dans G.*

Fait 2.6. – **([9])** *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Alors $G = D * C$ où D et C sont des sous-groupes définissables et caractéristiques de G, D est divisible et C est d'exposant borné. Si T est l'ensemble des éléments de torsion de D, alors T est central dans D et $D = T \times N$ pour un sous-groupe N divisible et sans torsion. C est la somme directe de ses p-Sylows.*

Fait 2.7. – **([2], exercice 10, p. 98)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini, $U \lhd G$ un sous-groupe définissable, connexe et nilpotent et ϕ un automorphisme définissable de G qui agit sur U et centralise un nombre fini d'éléments de U. Alors $U = \{[u, \phi] : u \in U\}$. Si de plus $[G, \phi] \subseteq U$, alors $G = UC_G(\phi)$.*

Un p-tore d'un groupe de rang de Morley fini est un p-sous-groupe divisible abélien. La propriété suivante s'appelle la rigidité des tores :

Fait 2.8. – **([3])** *Soit T un p-tore dans un groupe de rang de Morley fini G. Alors $[N_G(T) : C_G(T)] < \infty$.*

Fait 2.9. – **(Zil'ber; [2], théorème 9.1)** *Soit $G = A \rtimes H$ un groupe de rang de Morley fini où A et H sont deux sous-groupes définissables infinis abéliens, A est H-minimal et $C_H(A) = 1$. Alors le sous-anneau $K = \mathbb{Z}[H]/ann_{\mathbb{Z}[H]}(A)$ de l'ensemble $End(A)$ des endomorphismes de A est un corps définissable* *algébriquement clos. De plus $A \cong K^+$, H est isomorphe à un sous-groupe T de K^* et H agit sur A par multiplication, i.e.*

$$G = A \rtimes H \cong \left\{ \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in T \ , \ a \in K \right\}.$$

Corollaire 2.10. – **(Frécon)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Si A est un sous-groupe G-minimal de G, alors $C_G(a) = C_G(A)$ pour chaque élément a non trivial de A.*

Fait 2.11. – **([2], théorème 9.29)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble. Alors les p-sous-groupes de Sylow de G sont connexes.*

Fait 2.12. – **([8])** *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors $G/F(G)^\circ$ (et, donc, $G/F(G)$) est un groupe divisible et abélien.*

On utilisera éventuellement le lemme suivant, vrai dans tout groupe simple de rang de Morley fini.

Lemme 2.13. – *Soit G un groupe simple de rang de Morley fini et M un sous-groupe propre définissable de G. Alors $rg(x^G \cap M) < rg(x^G)$ pour chaque élément non trivial x de G.*

Preuve. – Supposons que $rg(x^G \cap M) = rg(x^G)$ pour un $x \in G^\#$. Soit $N = \cap_{g \in G} M^g$. Par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables, N est l'intersection d'un nombre fini k de conjugués de M. D'autre part x^G est en bijection interprétable avec $G/C_G(x)$, donc de degré un. Une induction évidente sur k montre alors $N \cap x^G$ est générique dans x^G. En particulier le sous-groupe normal propre N de G est non trivial, une contradiction car G est simple. $\square$

Le lemme suivant peut être rapproché des situations de groupes de type pair avec un sous-groupe faiblement inclus, le sous-groupe minimal se comportant ici comme le 2-sous-groupe de Sylow dans les situations d'inclusion faible typiques de [1] et [6].

Lemme 2.14. – *Soit G un FT-groupe simple infini, B un sous-groupe de Borel de G et U un sous-groupe B-minimal de B. Alors $C_G(u)^\circ = C_B(U)^\circ$ pour chaque élément non trivial u de U.*

Preuve. – Il suffit de montrer que $C_G(u)^\circ \leq B$ d'après le corollaire 2.10. On peut supposer u et U non centraux dans B. Par rigidité des tores, U est alors sans torsion ou p-unipotent pour un nombre premier p. S'il est sans torsion, c'est le groupe additif d'un corps interprétable algébriquement clos de caractéristique nulle (fait 2.9). Comme un tel corps ne peut pas avoir de sous-groupe additif propre, non trivial et définissable ([10]), U est un sous-groupe définissable et infini de G minimal avec ces propriétés. Donc $d(\langle u\rangle) = U$. Comme $d(\langle u\rangle) \leq Z(C_G(u)^\circ)$, U est normal dans $C_G(u)^\circ$ et $C_G(u)^\circ \leq N_G(U)^\circ = B$. Supposons maintenant que U soit p-unipotent. Alors U est dans le centre de l'unique sous-groupe p-unipotent maximal de B, disons U_p. En particulier $U_p \leq C_G(u)^\circ$. On voit par condition de normalisateur que U_p est aussi l'unique sous-groupe p-unipotent maximal de $C_G(u)^\circ$. Donc $C_G(u)^\circ \leq N_G(U_p)^\circ = B$. $\square$

3 Une configuration de type impair.

Dans cette section on prouve le théorème 1.2. Soient G, S, i, B et U comme dans l'énoncé. Notons que $i \in S^\circ \leq C_G(i)^\circ$. De plus U est abélien, donc inclus dans $F(B)^\circ$. Le fait 2.5 montre que $U \leq Z(F(B)^\circ)^\circ$. Notre hypothèse indique donc que $C_G(i)^\circ \cap F(B)^\circ$ est fini.

Lemme 3.1. – *$F(B)^\circ$ est sans involution, inversé par i et $B = F(B)^\circ \rtimes C_G(i)^\circ$.*

Preuve. – On a $S^\circ \leq C_G(i)^\circ \leq B$. Si $F(B)^\circ$ contient une involution, alors il contient un 2-tore maximal non trivial (fait 2.11) et c'est nécessairement S° car G est de rang de Prüfer un. Alors S° est central dans $F(B)^\circ$ (fait 2.6), une contradiction. Donc $F(B)^\circ$ est sans involution et il est inversé par i selon le fait 2.2.

On voit facilement que $C_{B/F(B)^\circ}(i) = C_B(i)F(B)^\circ/F(B)^\circ$. Or $B/F(B)^\circ$ est abélien, donc $B = C_B(i)F(B)^\circ$. Ce qui précède montre que $C_{F(B)^\circ}(i) = 1$, donc $B = F(B)^\circ \rtimes C_B(i)$. Comme B est connexe, il est de degré un et il doit en être de même de $C_B(i)$ (fait 2.1) ; ainsi on obtient que $C_B(i) = C_B(i)^\circ = C_G(i)^\circ$. $\square$

Le lemme précédent montre en particulier que $F(B)^\circ$ est abélien et U est aussi $C_G(i)^\circ$-minimal. Notons $T = C_G(i)^\circ$. C'est un groupe divisible et abélien selon le lemme précédent et le fait 2.12. Notons aussi $M = N_G(B)$.

Selon le fait 2.9, il existe un corps K interprétable dans $U \rtimes T$, avec un sous-groupe définissable T_1 du groupe multiplicatif K^*, tel que $U \cong K^+$,

$T/C_T(U) \cong T_1$ et $U \rtimes T/C_T(U)$ est isomorphe au sous-groupe $K^+ \rtimes T_1$ du produit semidirect standard $K^+ \rtimes K^*$.

Notons $M_1 = U \rtimes T$ et considérons les ensembles définissables (la notation w désignant toujours une involution de i^G)

$$T(w) = \{m_1 \in M_1 : {m_1}^w = {m_1}^{-1}\},$$

$$X_1 = \{w \in i^G \setminus M : rg(T(w)) < rg(T)\},$$
$$X_2 = \{w \in i^G \setminus M : rg(T(w)) \geq rg(T)\}.$$

Le lemme 2.13 indique que $(i^G \setminus M)$ est générique dans i^G.

Lemme 3.2. – *$Z(B)$ est un sous-groupe fini de T, ainsi que $C_T(U)$.*

Preuve. – $Z(B)^\circ \leq F(B)^\circ$ est centralisé par i et inversé par i selon le lemme précédent. C'est donc un 2-groupe abélien élémentaire et il doit être trivial. La deuxième assertion découle de notre hypothèse. □

Lemme 3.3. – *Si u est un élément non trivial de U, alors $C_G(u)^\circ = F(B)^\circ$.*

Preuve. – Le lemme 2.14 montre que $C_G(u)^\circ = C_B(U)^\circ = F(B)^\circ$. □

Lemme 3.4. – *Si $g \in G \setminus M$, alors $U \cap U^g = 1$ et $M_1 \cap U^g$ est fini.*

Preuve. – Soit g un élément de G tel que l'intersection V de U et U^g soit non triviale. Alors le lemme 3.3 montre que $F(B)^{\circ g} \leq C_G(V)^\circ = F(B)^\circ$, donc $g \in N_G(F(B)^\circ)$. Or B est un sous-groupe de Borel de G qui est un FT-groupe simple, donc $B = N_G(F(B)^\circ)^\circ$ et $g \in M$.

Supposons maintenant $g \in G \setminus M$ et $W = (M_1 \cap U^g)^\circ \neq 1$. Alors ce qui précède montre que $W \cap U = 1$. Si $W \leq C_{M_1}(U)$, alors $C_T(U)$ est infini car W l'est, une contradiction. Donc il existe $x \in W^\#$ tel que $C_U(x) < U$, c'est-à-dire $C_U(x) = 1$ selon le corollaire 2.10. On a $x = tu$, où $t \in T$ et $u \in U$, et $u = [u', x]$ pour un $u' \in U$ d'après le fait 2.7. Donc $t^{-1} = ux^{-1} = u'^{-1}x^{-1}u'$ et x est dans un conjugué de T et centralise par conséquent un 2-tore non trivial. D'autre part $x \in U^g$, donc le lemme 3.3 montre que $C_G(x)^\circ = F(B)^{\circ g}$ est sans involution, une contradiction. □

Corollaire 3.5. – *Si $w \in i^G \setminus M$, alors $T(w)$ est un sous-groupe abélien de M_1 disjoint de U.*

Preuve. – L'involution w normalise $[T(w), T(w)]$ qui est inclus dans U, donc trivial. Ainsi $T(w)$ est un groupe abélien. □

Corollaire 3.6. – $rg(G) \geq rg(T) + 2rg(U)$.

Lemme 3.7. – $rg(X_2) = rg(i^G)$.

Preuve. – Comme $rg(i^G) = rg(i^G \setminus M)$, il suffit de montrer que $rg(X_1) < rg(i^G)$. Définissons la relation d'équivalence $\sim$ sur X_1 par $w_1 \sim w_2$ si $w_1 w_2 \in M_1$, ce qui est équivalent à $w_1 w_2 \in T(w_1)$.

Soit $p: X_1 \longrightarrow X_1/\sim$ la projection naturelle et notons, pour $0 \leq k \leq rg(T) - 1$,

$$(X_1)_k = \{w_1 \in X_1 : rg(p^{-1}(p(w_1))) = k\}.$$

Les $(X_1)_k$ forment une partition finie de X_1. Soit k_0 tel que $(X_1)_{k_0}$ soit générique dans X_1. Alors $rg(X_1) = rg((X_1)_{k_0}) = rg(p((X_1)_{k_0})) + k_0 \leq rg(X_1/\sim) + k_0$. Mais $rg(M_1) + rg(X_1/\sim) = rg(X_1 M_1) \leq rg(G) = rg(i^G) + rg(T)$, donc $rg(X_1/\sim) \leq rg(i^G) + rg(T) - rg(M_1) = rg(i^G) - rg(U)$ et on obtient $rg(X_1) \leq rg(i^G) - rg(U) + k_0$.

D'autre part le fait que l'action de $T/C_T(U)$ sur U soit libre montre que $rg(U) \geq rg(T/C_T(U))$ et comme $C_T(U)$ est fini, $rg(U) \geq rg(T)$. Donc $k_0 - rg(U) \leq k_0 - rg(T) < 0$ et $rg(X_1) < rg(i^G)$. □

Ceci montre en particulier que X_2 est non vide.

Lemme 3.8. – *Si $w_1 \in X_2$, alors $T(w_1)$ est un unique U-conjugué de T.*

Preuve. – $T(w_1) \cap U = 1$ et $rg(UT(w_1)) \geq rg(M_1)$, donc la connexité de M_1 implique que $M_1 = U \rtimes T(w_1)$. En particulier $T(w_1)$ est le centralisateur dans M_1 d'une unique U-conjuguée de i. □

Lemme 3.9. – $rg(X_2) \leq rg(U) + rg(T)$.

Preuve. – Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur X_2 définie par $w_1 \sim w_2$ si $w_1 w_2 \in M_1$. Considérons l'application bien définie et définissable

$$\begin{array}{rccl} \phi: & X_2/\sim & \longrightarrow & U \\ & w_1/\sim & \longmapsto & u, \end{array}$$

où u est l'unique élément de U tel que $T(w_1) = T^u$.

Montrons que ϕ a des fibres finies. Par conjugaison, il suffit de le voir pour $u = 1$ (car $\phi((w_1/\sim)^u) = \phi(w_1/\sim)u$). La rigidité des tores (fait 2.8) et le fait que T soit abélien montre évidemment que $N_G(T)^\circ = C_G(S^\circ)^\circ = C_G(i)^\circ = T$, donc que T est d'indice fini dans son normalisateur. Chaque élément de $\phi^{-1}(1)$ est un coset de $N_G(T)/T$ (distinct de T), donc $\phi^{-1}(1)$ est bien fini.

Par conséquent $rg(X_2/\sim) \leq rg(U)$, donc $rg(X_2) - rg(T) \leq rg(U)$. □

Corollaire 3.10. – *$rg(T) = rg(U)$ et $rg(G) = 3rg(U)$.*

Preuve. – Le lemme précédent montre que $rg(G) = rg(i^G) + rg(T) = rg(X_2) + rg(T) \leq rg(U) + 2rg(T)$. Or $rg(G) \geq rg(T) + 2rg(U)$ d'après le corollaire 3.6. Donc $rg(U) \leq rg(T)$ et ces deux rangs sont égaux d'après la remarque dans la preuve du lemme 3.7. □

Fixons w une involution de X_2 qui inverse T. On remarque que w inverse $Z(B) \leq T$, donc $Z(B)$ doit être trivial.

Lemme 3.11. – *$F(B)^{\circ w} \cap M_1$ est fini.*

Preuve. – Supposons que $X = (F(B)^{\circ w} \cap M_1)^\circ$ soit non trivial. Si x est un élément non trivial de $X \cap U$, alors $F(B)^{\circ w} \leq C_G(x)^\circ = F(B)^\circ$, donc $w \in N_G(F(B)^\circ) = M$, une contradiction. Donc $X \cap U = 1$.

Comme U est d'indice fini dans $C_{M_1}(U)$, il existe $x \in X \setminus C_X(U)$ et le corollaire 2.10 montre que $C_U(x) = 1$. On voit comme dans le lemme 3.4 que $x = t^u$ où $u \in U$ et t est un élément de T tel que $C_{M_1}(t) = T$. Ainsi $X \leq C_{M_1}(x) = C_{M_1}(t^u) = T^u$. D'autre part $T^w = T$ normalise $X^w = (F(B)^\circ \cap {M_1}^w)^\circ$ car $T \leq {M_1}^w$, donc T normalise $X^{w^2} = X$. Ainsi $[T, X] \leq X \cap U = 1$, c'est-à-dire $X \leq C_{M_1}(T) = T$. En particulier $i = i^w$ centralise $X^w \leq F(B)^\circ$, une contradiction car i inverse $F(B)^\circ$. □

Corollaire 3.12. – *$F(B)^\circ = U$ (en particulier $B = M_1$), $C_T(U) = 1$ et $U \rtimes T \cong K^+ \rtimes K^*$.*

Preuve. – Pour le premier point, il suffit de voir que $3rg(U) = rg(G) \geq rg(M_1) + rg(F(B)^\circ) = 2rg(U) + rg(F(B)^\circ)$, donc que $rg(F(B)^\circ) \leq rg(U)$. La deuxième assertion provient du fait que $C_T(U) = Z(B) = 1$, et la troisième du fait que $rg(U) = rg(T)$. □

Lemme 3.13. – *Si $g \in G \setminus M$, alors $F(B)^{\circ g} \cap M = 1$.*

Preuve. – Montrons d'abord que $X = F(B)^{\circ g} \cap M^\circ$ est trivial. $X \cap F(B)^\circ = 1$ car sinon $F(B)^{\circ g} = C_G(X \cap F(B)^\circ)^\circ = F(B)^\circ$ et $g \in M$, une contradiction. Donc X est dans un conjugué de T et centralise un 2-tore non trivial ; il est par conséquent trivial.

Donc $Y = F(B)^{\circ g} \cap M$ est un groupe fini. S'il est non trivial, alors K est de caractéristique p où p est un nombre premier non nul. Soit alors y un élément d'ordre p de Y. Alors $C_{M^\circ}(y)^\circ \leq F(B)^{\circ g} \cap M^\circ = 1$, donc M° doit être nilpotent d'après le corollaire 2.4, une contradiction. □

Corollaire 3.14. – *$M = B$ et $G = B \sqcup UwB$.*

Preuve. – Si $g \in G \setminus M$, l'application $(u, m) \longmapsto ugb$, de $U \times M$ dans UgM, est une bijection interprétable. Comme son image est générique dans G, M doit être connexe, c'est-à-dire $M = B$. Enfin la connexité de G implique que $G = B \sqcup UwB$. $\square$

Preuve du théorème 1.2 : Il suffit de montrer que G est un groupe de Zassenhaus scindé et d'appliquer le théorème 11.89 de [2]. G, agissant par multiplication à gauche sur les cosets à gauche de B, est un groupe doublement transitif scindé, le stabilisateur point par point de B et wB étant $B \cap B^w = T$. Ce stabilisateur T contient une involution. Si de plus $t \in T$ stabilise un troisième point uwB, où $u \in U^{\#}$, alors $uwB = tuwB$ et $t^u \in T^u \cap B^w \leq T^u \cap B \cap B^w = T^u \cap T = 1$. $\square$

Références bibliographiques

[1] T. Altinel, A. Borovik et G. Cherlin. On groups of finite morley rank with weakly embedded subgroups. *J. Algebra*, (211):409–456, 1999.

[2] A. Borovik and A. Nesin. *Groups of Finite Morley Rank*. Oxford University Press, 1994.

[3] A. Borovik and B. Poizat. Tores et p-groupes. *J. Symbolic Logic*, (55):565–583, 1990.

[4] E. Jaligot. Thèse de doctorat, 1999.

[5] E. Jaligot. Groupes de type mixte. *J. Algebra*, (212):753–768, 1999.

[6] E. Jaligot. Groupes de type pair avec un sous-groupe faiblement inclus. Soumis pour publication.

[7] A. Nesin. On sharply n-transitive superstable groups. *J. Pure Appl. Algebra*, (69):73–88, 1990.

[8] A. Nesin. On solvable groups of finite morley rank. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (321):659–690, 1990.

[9] A. Nesin. Poly-separated and ω-stable nilpotent groups. *J. Symbolic Logic*, (56):694–699, 1991.

[10] B. Poizat. *Groupes stables*. Nur Al-mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, France, 1987.

[11] F.O. Wagner. *Stable groups*. London Mathematical Society Lecture Notes Series. Cambridge University Press, 1997.