Conséquences de la propagation d'une espèce sur sa diversité génétique : une approche mathématique

Jimmy GARNIER

en collaboration avec O. Bonnefon[⋆], J. Coville[⋆], T. Giletti[†], F. Hamel[*], E.K. Klein[⋆], L. Roques[⋆]

[⋆]Biostatistics and Spatial Processes, INRA Avignon, France
[†]Université de Lorraine, IECL, France
[*]Aix-Marseille Université, LATP, France

Journée EDP Rhône-Alpes-Auvergne 2013, 22/11/13

Contexte scientifique : augmentation d'aire de répartition

Augmentation du nombre d'observations de propagation d'espèce, principalement du à :

- changement climatique (déplacement des niches climatiques);
- invasions biologiques;
- activités humaines ou animales (transport d'espèces).

Hyp: La propagation d'espèce est le résultat de deux forces

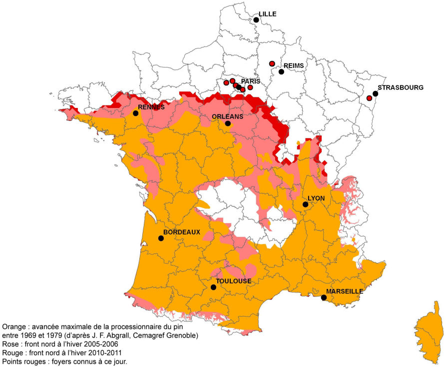
la dispersion et la croissance (naissance-mort)

Objectifs: Étudier l'influence des modalités de dispersion/croissance sur la dynamique de la diversité génétique d'une espèce en expansion.

Outils mathématiques: modèles d'équations aux dérivées partielles et d'équations intégro-différentielles.

Colonisation de l'Europe par la Chenille Processionaire du Pin

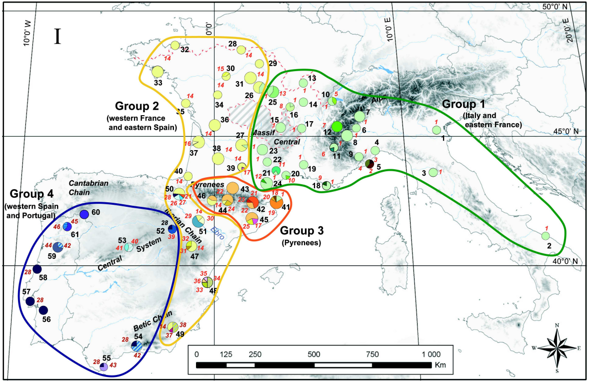
La manière dont se propage une espèce a de profondes conséquences sur sa généalogie.



Aire de répartition de la Processionaire du Pin en 1980 - 2006 - 2011.

Colonisation de l'Europe par la Chenille Processionaire du Pin

Distribution géographique de 46 cytochromes *c* oxydase subunit I de *Thaumetopoea pityocampa (Rousselet et al. 2010)*.



→ **Effet de la dispersion et de la croissance sur la structure spatiale de la population.**

Approche mathématique continue

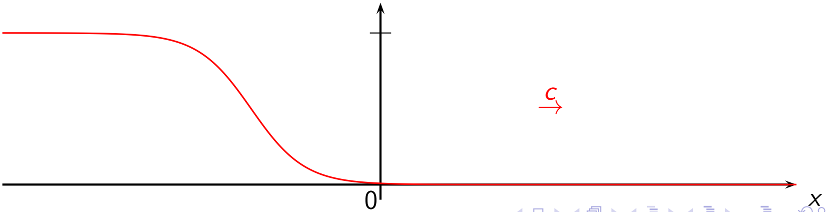
Modèle de réaction-dispersion:
La densité de population de gènes $u(t,x)$ suit le modèle:

$$\underset{\text{Variation temporelle}}{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)} = \underbrace{\mathcal{D}(u)(t,x)}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{Croissance}}.$$

Terme de dispersion $\mathcal{D}(u)(t,x)$: opérateur linéaire modélisant la différence entre les individus qui rentrent et sortent en x.

Terme de croissance f: taux de croissance de la population qui dépends de l'environnement (capacité d'accueil).

Fronts progressifs : Solutions particulières de type $u(t,x) = U(x-ct)$



Approche mathématique continue

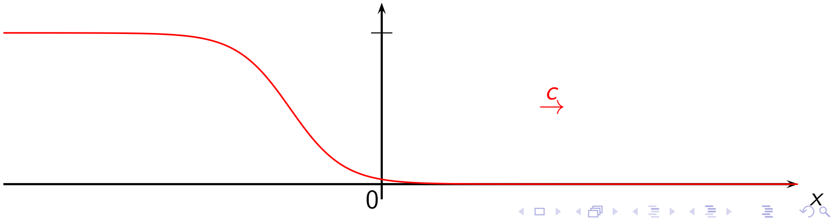
Modèle de réaction-dispersion:
La densité de population de gènes $u(t,x)$ suit le modèle:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}_{\text{Variation temporelle}} = \underbrace{\mathcal{D}(u)(t,x)}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{Croissance}}.$$

Terme de dispersion $\mathcal{D}(u)(t,x)$: opérateur linéaire modélisant la différence entre les individus qui rentrent et sortent en x.

Terme de croissance f: taux de croissance de la population qui dépends de l'environnement (capacité d'accueil).

Fronts progressifs : Solutions particulières de type $u(t,x) = U(x - ct)$



Approche mathématique continue

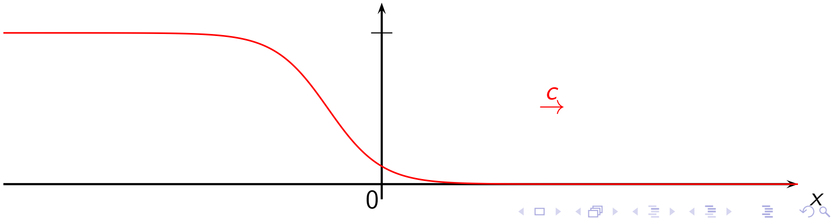
Modèle de réaction-dispersion:
La densité de population de gènes $u(t,x)$ suit le modèle:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}_{\text{Variation temporelle}} = \underbrace{\mathcal{D}(u)(t,x)}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{Croissance}}.$$

Terme de dispersion $\mathcal{D}(u)(t,x)$: opérateur linéaire modélisant la différence entre les individus qui rentrent et sortent en x.

Terme de croissance f: taux de croissance de la population qui dépends de l'environnement (capacité d'accueil).

Fronts progressifs : Solutions particulières de type $u(t,x) = U(x - ct)$



Approche mathématique continue

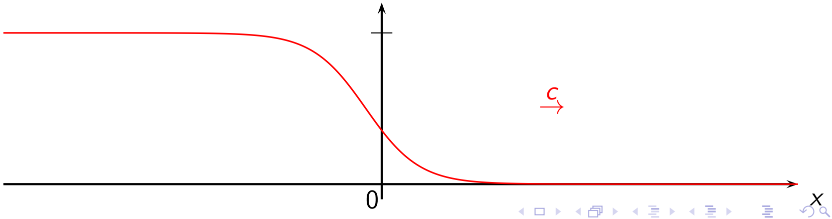
Modèle de réaction-dispersion:
La densité de population de gènes $u(t,x)$ suit le modèle:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}_{\text{Variation temporelle}} = \underbrace{\mathcal{D}(u)(t,x)}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{Croissance}}.$$

Terme de dispersion $\mathcal{D}(u)(t,x)$: opérateur linéaire modélisant la différence entre les individus qui rentrent et sortent en x.

Terme de croissance f: taux de croissance de la population qui dépends de l'environnement (capacité d'accueil).

Fronts progressifs : Solutions particulières de type $u(t,x) = U(x-ct)$



Approche mathématique continue

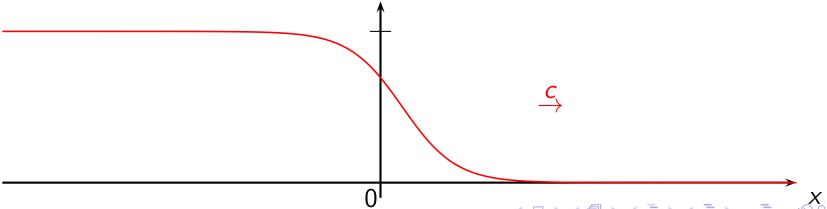
Modèle de réaction-dispersion:
La densité de population de gènes $u(t,x)$ suit le modèle:

$$\underset{\text{Variation temporelle}}{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)} = \underbrace{\mathcal{D}(u)(t,x)}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{Croissance}}.$$

<u>*Terme de dispersion* $\mathcal{D}(u)(t,x)$:</u> opérateur linéaire modélisant la différence entre les individus qui rentrent et sortent en x.

<u>*Terme de croissance* f:</u> taux de croissance de la population qui dépends de l'environnement (capacité d'accueil).

Fronts progressifs : Solutions particulières de type $u(t,x) = U(x - ct)$



Approche mathématique continue

Modèle de réaction-dispersion:

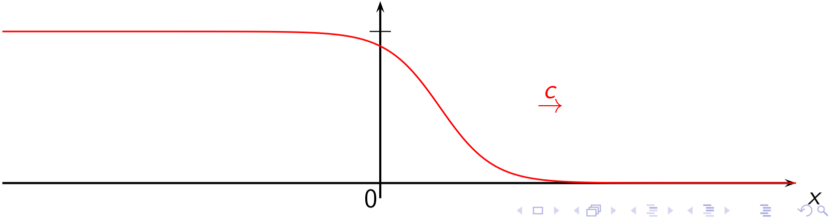
La densité de population de gènes $u(t,x)$ suit le modèle:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}_{\text{Variation temporelle}} = \underbrace{\mathcal{D}(u)(t,x)}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{Croissance}}.$$

Terme de dispersion $\mathcal{D}(u)(t,x)$: opérateur linéaire modélisant la différence entre les individus qui rentrent et sortent en x.

Terme de croissance f: taux de croissance de la population qui dépends de l'environnement (capacité d'accueil).

Fronts progressifs : Solutions particulières de type $u(t,x) = U(x-ct)$



Approche mathématique continue

Modèle de réaction-dispersion:

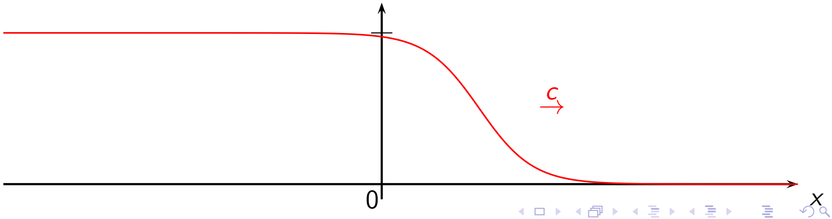
La densité de population de gènes $u(t,x)$ suit le modèle:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}_{\text{Variation temporelle}} = \underbrace{\mathcal{D}(u)(t,x)}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{Croissance}}.$$

Terme de dispersion $\mathcal{D}(u)(t,x)$: opérateur linéaire modélisant la différence entre les individus qui rentrent et sortent en x.

Terme de croissance f: taux de croissance de la population qui dépends de l'environnement (capacité d'accueil).

Fronts progressifs : Solutions particulières de type $u(t,x) = U(x - ct)$



Approche mathématique continue

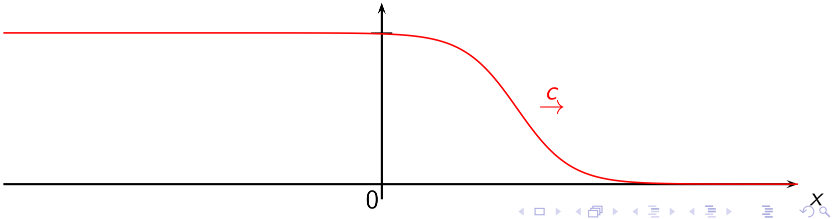
Modèle de réaction-dispersion:
La densité de population de gènes $u(t,x)$ suit le modèle:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}_{\text{Variation temporelle}} = \underbrace{\mathcal{D}(u)(t,x)}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{Croissance}}.$$

Terme de dispersion $\mathcal{D}(u)(t,x)$: opérateur linéaire modélisant la différence entre les individus qui rentrent et sortent en x.

Terme de croissance f: taux de croissance de la population qui dépends de l'environnement (capacité d'accueil).

Fronts progressifs : Solutions particulières de type $u(t,x) = U(x - ct)$



Modèles de dispersion

Modèle diffusif: dispersion locale autour de ses plus proches voisins

$$\mathcal{D}(u)(t,x) = \partial_x^2 u(t,x);$$

=> Dispersion locale liée aux marches aléatoires.

Modèle intégro-différentiel : dispersion non-locale

$$\mathcal{D}(u)(t,x) = \int_{\mathbb{R}} J(|x-y|)\big(u(t,y) - u(t,x)\big)\,dy;$$

Noyau de dispersion: $J(x-y)$ est la probabilité qu'un individu venant de y arrive en x.

=> Opérateur de dispersion non-locale. Il peut prendre en compte des événements de dispersion à longue distance.

Modèles de croissance de population en milieu homogène

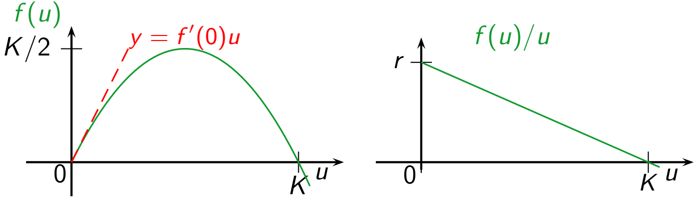
Modèle logistique: densité dépendance négative due à la compétition (nourriture ou territoire).

$$f(0) = f(K) = 0, \quad \text{et} \quad 0 < f(u) \leq f'(0)u \quad \text{pour tout } u \in (0, K)$$

Exemple:

$$f(u) = r\,u\left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

$-r = f'(0)$ taux de croissance intrinsèque;
$-K$ capacité d'accueil de l'environnement;



Taux de croissance par individu $f(u)/u$ maximal en 0;

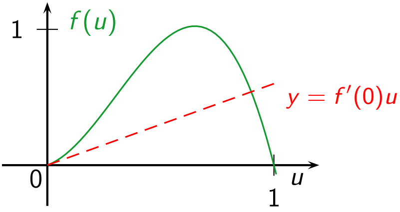
Modèles de croissance de population en milieu homogène

Effet Allee: diminution de la fertilité à faible densité.

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) < 0.$$

Effet Allee faible
monostable

$f'(0) > 0$ and $f(u) > 0$ in $(0, 1)$

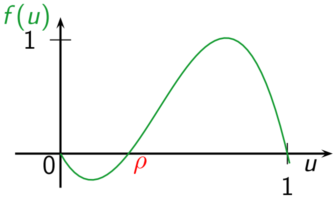


Taux de croissance par individu non maximal en 0 mais toujours positif.

Effet Allee fort
bistable

seuil de l'effet Allee: $\rho \in (0, 1/2)$

$$f(u) = u(1-u)(u-\rho)$$



Taux de croissance par individu négatif à faible densité.

Partie I.

Structure interne des fronts de colonisation et diversité génétique

avec T. Giletti, F. Hamel, E.K. Klein et L. Roques,
publiés dans J. Math. Pures Appl., 2012 et Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 2012

Partie II.

Dynamique interne des fronts non-locaux et effets antagonistes des événements de dispersion à longue distance sur la diversité génétique

avec O. Bonnefon, J. Coville et L. Roques,
publié dans SIAM J. Math. Anal., 2011 et preprint 2013;

Partie I.

Dynamique interne des fronts de colonisation et diversité génétique

Modèle de Réaction-Diffusion

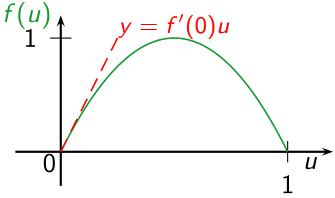
La population a une dispersion diffusive, $\mathcal{D} := \partial_x^2$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) + f(u(t,x)), \; t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Termes de croissance monostables:

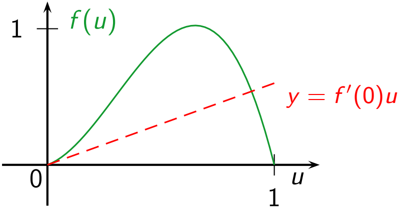
$$f(0) = f(1) = 0, \; f(s) > 0 \text{ pour tout } s \in (0,1), \text{ et } f'(0) > 0.$$

terme de type KPP
(sans effet Allee)
$0 < f(u) \leq f'(0)u$



Effet Allee faible

$f(u)/u$ non maximal en 0.



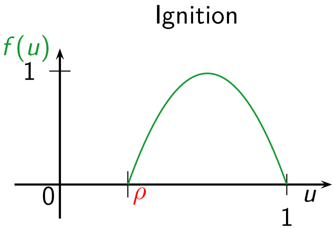
Modèle de Réaction-Diffusion

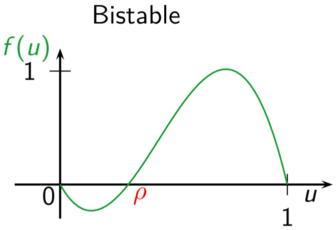
La population a une dispersion diffusive, $\mathcal{D} := \partial_x^2$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) + f(u(t,x)), \; t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Termes de type ignition et bistable: **Effet Allee fort**

$$f(0) = f(\rho) = f(1) = 0, \; \int_0^1 f > 0$$
$$f(u) \leq 0 \;\text{ pour tout } u \in (0,\rho), \quad \text{et} \quad f(u) > 0 \;\text{ pour tout } u \in (\rho, 1)$$





Fronts progressifs en milieu homogène

Existence de front U_c (*Aronson and Weinberger 1975-1978*):

Monostable: $c \in [c^*, +\infty)$ *avec* $c^* \geq 2\sqrt{f'(0)} > 0$;

Bistable-Ignition: existence d'une unique vitesse $c > 0$;

$$U_c''(y) + cU_c'(y) + f(U_c(y)) = 0, \ \text{dans } \mathbb{R}, \quad U_c(-\infty) = 1 \ \text{et } U_c(+\infty) = 0.$$

Unicité du profile U_c (à translation près) pour chaque vitesse c, et $U_c' < 0$.

Attractivité des fronts (*Kolmogorov et al. 1937, Bramson 1983, Lau 1985)-(Fife et McLeod 1977, Fife 1979)*: *si* $u_0 =$ *Heaviside ou support compact*

$\rightarrow$ *vitesse de propagation* c *de* u *égale* $c = c^*$, *la vitesse minimale ou unique des fronts progressifs.*

$\rightarrow$ u *converge vers un front progressif en temps grand.*

Fronts tirés et fronts poussés : cas monostable (*Stokes 1976*)

Front tiré : $\star$ *soit un front critique de vitesse* $c = c^* = 2\sqrt{f'(0)}$, *la vitesse du problème linéarisé en* 0

$\star$ *soit un front sur-critique de vitesse* $c > c^*$;

"The speed of propagation of the wave is determined by the fecundity of the pioneers - the leading edge of the population distribution." (*Stokes 1976*)

Front poussé : *front critique tel que* $c^* > 2\sqrt{f'(0)}$.

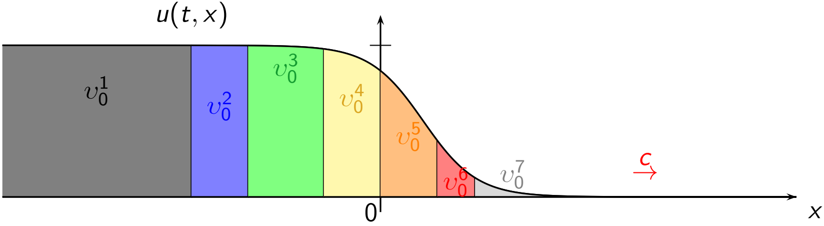
" The speed of propagation is determined not by the behavior of the leading edge of the distribution, but by the whole wave." (*Stokes 1976*)

Q? : Quel est la nature des fronts de type ignition ou bistable?

$\rightarrow$ Nouvelle approche pour étudier et caractériser la dynamique interne d'une solution qui se propage.

Décomposition d'un front progressif

(Vlad et al. 2004, Hallatschek and Nelson 2008) Une population en expansion est représentée par un front $u := U_c(x - ct)$ et est composée de **fractions *neutres*** υ^k:



En $t = 0$: $u_0(x) := u(0,x) = \sum_{k=1}^{6} \upsilon_0^k(x)$, où $\upsilon_0^k \geq 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, 6\}$.

Dynamique interne d'un front progressif

Les fractions υ^k diffèrent uniquement par leur ***position*** et leur ***allèle*** :

$$\begin{cases} \partial_t \upsilon^k(t,x) = \partial_x^2 \upsilon^k(t,x) + \dfrac{\upsilon^k(t,x)}{U_c(x-ct)} f(U_c(x-ct)), \; t>0 \text{ et } x \in \mathbb{R}, \\ \upsilon^k(0,x) = \upsilon_0^k(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Taux de croissance par individu $f(u)/u$ identique pour toutes les fractions et égal à celui de la population totale $u := U_c(x-ct)$. *(Hamel 1997, Berestycki and Rossi 2008, Berestycki et al. 2009)*

Repère mobile de vitesse c : la proportion $p^k = \upsilon^k/u$ d'individu de la fraction k vérifie

$$\begin{cases} \partial_t p^k(t,x) = \partial_x^2 p^k(t,x) + (c + 2U_c'(x)/U_c(x))\partial_x p^k(t,x), \; t>0 \text{ et } x \in \mathbb{R}, \\ p^k(0,x) = \upsilon_0^k(x)/U(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Fronts tirés

Theorem (*Garnier et al. 2012, Roques et al. 2012*) - cas tiré

Supposons f monostable et (c, U_c) un front tiré, c'est à dire

$$c = c^* = 2\sqrt{f'(0)} \quad \text{ou} \quad c > c^*.$$

Si υ_0 décroît plus rapidement que U_c en $+\infty$ au sens où

$$\int_0^{+\infty} e^{cx}\, \upsilon_0(x)^2 dx < +\infty,$$

alors

$$\max_{x \in [A,+\infty)} \upsilon(t, x + ct) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty, \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathbb{R}.$$

De plus, si $\upsilon_0(-\infty) = 0$, alors

$$\upsilon(t, x) \to 0 \quad \text{uniformément sur} \quad \mathbb{R} \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

Fronts poussés

Théorème (*Garnier et al. 2012, Roques et al. 2012*) - cas poussé

Supposons f monostable tel que $c = c^* > 2\sqrt{f'(0)}$ ou ignition ou bistable. Alors, toutes fractions υ à l'intérieur de U_c vérifie pour tout $A \in \mathbb{R}$

$$\max_{x\in[A,+\infty)} |\upsilon(t,x+ct) - p(\upsilon_0)U_c(x)| \to 0 \text{ lorsque } t \to +\infty,$$

où la proportion $p(\upsilon_0)$ est définie par :

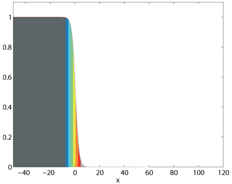
$$p(\upsilon_0) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon_0(x)\, U_c(x)\, e^{c\,x}\, dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} U_c^2(x)\, e^{c\,x}\, dx} \in (0,1].$$

De plus,

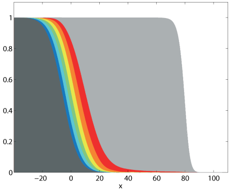
$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x_0 \in \mathbb{R}, \quad \liminf_{t\to+\infty} \left(\min_{\alpha\sqrt{t}\le x\le x_0+ct} \upsilon(t,x) \right) > 0.$$

Conséquences en génétique des populations

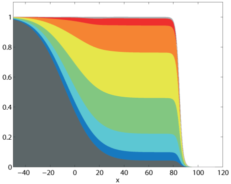
Dynamique des fraction v^k.



Structure initiale



sans effet Allee



avec effet Allee

- Diffusion sans effet Allee $\rightarrow$ érosion de la diversité;
- Front de colonisation tirés par les individus à l'avant du front.

- Diffusion avec effet Allee fort $\rightarrow$ maintien de la diversité;
- Front de colonisation poussés par l'intérieur du front.

Conclusions

⋆ Influence paradoxale de l'effet Allee lors d'une colonisation

Effet négatif : l'effet Allee réduit la vitesse de propagation des solutions;

Effet positif : l'effet Allee permets le maintien de la diversité le long d'un front de colonisation.

⋆ Les fronts de type bistable ou ignition ont la même dynamique interne que les fronts monostables poussés;
$\rightarrow$ généralisation de la notion de front poussé et front tiré introduite par *(Stokes, 1976)*.

Nouvelle notion de front poussé et tiré

$$\partial_t u(t,x) = \mathcal{D}(u)(t,x) + f(t,x,u(t,x)).$$

Supposons $f(t,x,0) = 0$ et l'existence d'une solution $p^+(t,x) > 0$.

Soit un front de transition connectant 0 et p^+ (Hamel and Berestycki, 2012):

$$\begin{cases} u(t,x) - p^+(t,x) & \to & 0 \text{ lorsque } x - x_t \to -\infty, \\ u(t,x) & \to & 0 \text{ lorsque } x - x_t \to +\infty. \end{cases}$$

Front de transition tiré: pour tout $0 \leq\not\equiv \upsilon_0 \leq u(0,\cdot)$, la solution υ de

$$\partial_t \upsilon(t,x) = \mathcal{D}(\upsilon)(t,x) + \frac{\upsilon(t,x)}{u(t,x)} f(t,x,u(t,x)).$$

vérifie

$$\forall\, M \geq 0, \quad \sup_{|x-x_t|\leq M} \upsilon(t,x) \to 0 \text{ as } t \to +\infty.$$

Front de transition poussé: Il existe $M \geq 0$ et une fraction υ tels que

$$\limsup_{t\to+\infty} \left(\sup_{|x-x_t|\leq M} \upsilon(t,x) \right) > 0.$$

Part II.

Dynamique interne des fronts non-locaux et effets antagonistes des événements de dispersion à longue distance sur la diversité génétique.

Événement de dispersion à longue distance

L'apparition d'événement de dispersion à longue distance peut avoir plusieurs conséquences sur la génétique des populations :

⋆ augmentation des effets de fondation *(Lambrinos, 2004)*

Effet de fondation : les individus colonisant des territoires inexplorés ne représentent qu'une partie du patrimoine génétique de la population.

ou

⋆ augmentation du brassage génétique loin des sources *(Klein et al., 2006)*.

Résultats numériques: les noyaux de dispersion à queue lourde favorisent le maintien de la diversité. *(Ibrahim et al.,1996; Austerlitz et al., 2003; Fayard et al., 2009)*.

Modèle intégro-différentiel

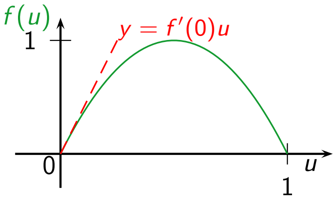
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} J(x-y)\big(u(t,y)-u(t,x)\big)\,dy}_{\text{Dispersion}} + \underbrace{f\big(u(t,x)\big)}_{\text{Croissance}}$$

Croissance monostable f:

$$f(0) = f(1) = 0,\ f(s) > 0 \text{ for all } s \in (0,1),\ \text{and } f'(0) > 0.$$

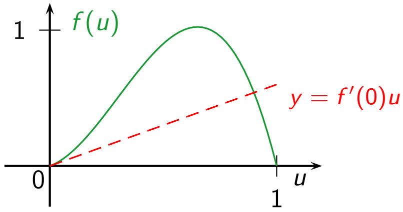
Croissance logistique – type KPP

$$0 < f(u) \leq f'(0)u$$



Effet Allee faible

$f(u)/u$ non maximal en 0.

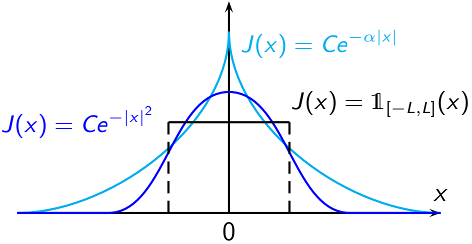


Noyaux de dispersion

Noyau à queue légère

Définition

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}} J(x)e^{\alpha x} < \infty.$$

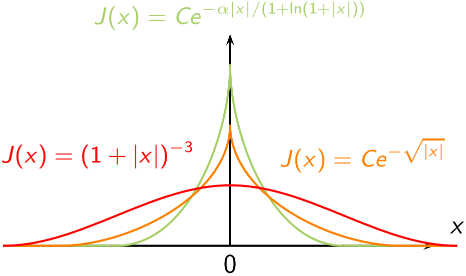


(Diekmann 1979, Thieme 1979, Schumacher 1980, Weinberger 1982, Coville et al. 2008)

Noyau à queue lourde

Définition

$$\forall\, \alpha > 0,\ J(x) \geq e^{-\alpha|x|} \quad \text{pour } |x| \text{ grand.}$$



(Medlock and Kot 2003, Yagisita 2009)

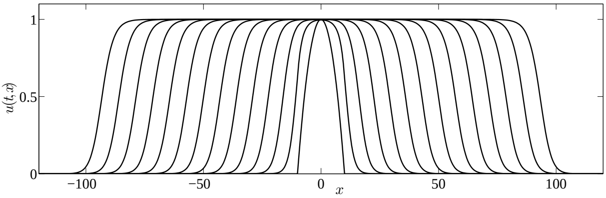
Dynamique des solutions

Noyaux à queue légère (*Schumacher 1980, Coville et al. 2008*)
existence de fronts de vitesse $c \geq c^* > 0$;

$$\int_{\mathbb{R}} J(x-y)(U(y)-U(x))dy + cU'(y) + f(U(y)) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$U(-\infty) = 1 \quad \text{et} \quad U(+\infty) = 0 \quad \text{et} \quad U' < 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

(*Lutcher et al., 2005*): *Si u_0 est à support compact, la vitesse de propagation c de u est égale à $c = c^*$, la vitesse minimale des fronts.*

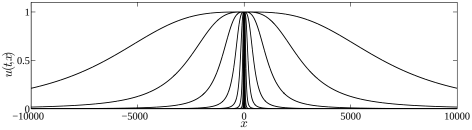


Observation numérique: la solution converge vers un front.

Dynamique des solutions

Noyau à queue lourde (*Garnier 2011*)

Accélération de la position des lignes de niveaux en $J^{-1}(e^{-\gamma t})$;

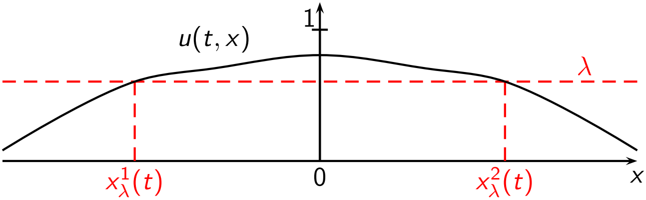


pour tout $\lambda \in (0,1)$, et $\varepsilon > 0$, les éléments $x_\lambda(t) \in E_\lambda(t)$ vérifient:

$$J^{-1}\left(e^{-(f'(0)-\varepsilon)t}\right) \leq |x_\lambda(t)| \leq J^{-1}\left(e^{-\rho t}\right) \quad \text{pour } t \text{ grand.}$$

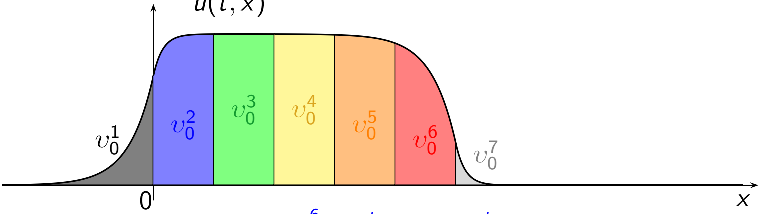
où l'ensemble E_λ de niveau λ est défini pour $t > 0$ par

$$E_\lambda(t) := \{x \in \mathbb{R},\ u(t,x) = \lambda\},$$



Dynamique interne d'une solution en expansion

(Garnier et al. 2012, Roques et al. 2012) La population en expansion u est composée de **fractions *neutres*** υ^k:



En $t=0$: $u_0(x) := u(0,x) = \sum_{k=1}^{6} \upsilon_0^k(x)$, où $\upsilon_0^k \geq 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, 6\}$.

Les fractions υ^k ne diffèrent que par leur ***position*** et leur ***allèle*** :

$$\begin{cases} \partial_t \upsilon^k = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} J(x-y)(\upsilon^k(t,y) - \upsilon^k(t,x))dy + \frac{\upsilon^k(t,x)}{u(t,x)} f\left(u(t,x)\right), \ t>0, \ x \in \mathbb{R}, \\ \upsilon^k(0,x) = \upsilon_0^k(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les fronts intégro-différentiels

Noyau à queue légère (*Garnier et al., preprint*)

- **KPP:** soit (c, U_c) un front tel que $c \geq c^*$. Si υ_0 vérifie

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{\lambda_-(c)x}\, \upsilon_0(x)\, dx < +\infty,$$

avec $\lambda_-(c)$ la plus petite racine de $\int_{\mathbb{R}} J(z)e^{\lambda z} dz - 1 + f'(0) - \lambda c$, alors

$$\max_{x\in[A,+\infty)} \upsilon(t, x + ct) \to 0 \;\text{ lorsque } t \to +\infty, \quad \text{pour tout } A \in \mathbb{R}.$$

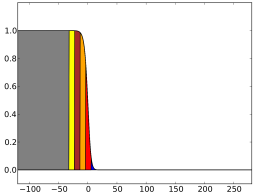
- **Effet Allee faible avec vitesse grand:** Si $c \geq c^{**} > c^*$ et si υ_0 décroît plus vite que U_c en $+\infty$, au sens précédent, alors

$$\max_{x\in[A,+\infty)} \upsilon(t, x + ct) \to 0 \;\text{ lorsque } t \to +\infty, \quad \text{pour tout } A \in \mathbb{R}.$$

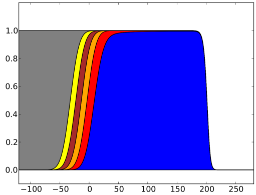
Conséquences en génétiques des populations

Noyau de dispersion à queue légère sans effet Allee

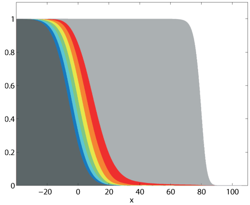
Dynamique des fractions υ^k pour $J(x) := J_{exp}(x) := \frac{1}{2} e^{-|x|}$.



Structure initiale



Dispersion non-locale



Diffusion locale

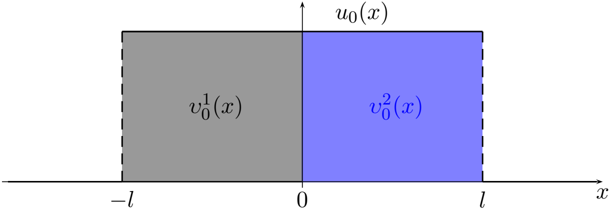
- Noyau de dispersion à queue légère sans effet Allee $\rightarrow$ perte de diversité génétique.
- Front intégro-différentiel $=$ front tiré;

Dynamique interne des solutions qui accélèrent

Noyau de dispersion: Soit $\beta > 0$,

$$J(x) = \frac{\beta}{\pi(\beta^2 + x^2)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Donnée initiale u_0: Soit $l > 0$,



Noyau à queue lourde (*Garnier et al., preprint*)

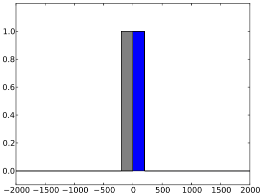
Il existe un temps $\tau > 0$ et une constante $\alpha > 0$ tels que

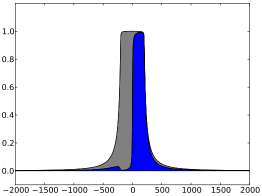
$$\frac{v^1(t,x)}{u(t,x)} \geq \alpha \text{ pour tout } t \geq \tau \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

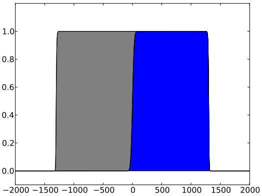
Conséquences en génétique des populations

Noyau à queue lourde vs Noyau à queue légère

Dynamique des fractions v^1 et v^2.





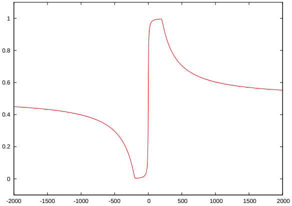


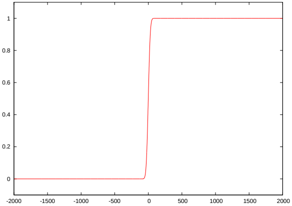
Structure initiale

Noyau à queue lourde

Noyau à queue légère

Proportion de v^2





Conclusions

⋆ Effets antagonistes des événements de dispersion à longue distance sur la diversité durant une colonisation :

- **Noyau de dispersion à queue légère :** érosion de la diversité génétique due aux effet de fondation;

- **Noyau de dispersion à queue lourde :** les événements de dispersion à longue distance permettent un brassage des gènes à l'avant du front de colonisation.

⋆ Les fronts intégro-différentiels sont tirés alors que les solutions qui accélèrent sont poussés

→ Généralisation de la notion de front poussé et tiré à des solutions quelconques qui se propagent.

Nouvelle notion de solution poussée et tirée

$$\partial_t u(t,x) = \mathcal{D}(u)(t,x) + f(u(t,x)),$$

u_0 est positive, $x_0^- := \inf\left(Supp(u_0)\right)$ et $x_0^+ := \sup\left(Supp(u_0)\right)$.

Solution tirée vers la droite : Pour tout $0 \leq v_0 \leq u(0,\cdot)$ et $\overline{Supp(v_0)} \subset [x_0^-, x_0^+)$, la solution v de

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \mathcal{D}(v)(t,x) + \frac{v(t,x)}{u(t,x)} f(u(t,x)), t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R},$$

vérifie pour tout niveaux $\lambda \in (0,1)$

$$\sup_{x_\lambda(t) \in E_\lambda(t) \cap (0,+\infty)} v(t, x_\lambda(t)) \to 0, \text{ lorsque } \ t \to +\infty.$$

Solution poussé vers la droite Il existe v_0 telle que $0 \leq v_0 \leq u(0,\cdot)$ et $\overline{Supp(v_0)} \subset [x_0^-, x_0^+)$, et il existe un niveau $\lambda \in (0,1)$ tels que la solution v vérifie

$$\limsup_{t \to +\infty} \sup_{x_\lambda(t) \in E_\lambda(t) \cap (0,+\infty)} v(t, x_\lambda(t)) > 0,$$

Merci de votre attention

Références

J Garnier. Accelerating solutions in integro-differential equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 43(4): 1955–1974, 2011;

J Garnier, F Hamel, E Klein, L Roques. Allee effect promotes diversity in traveling waves of colonization, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 109(23): 8828–8833, 2012;

J Garnier, T Giletti, F Hamel, L Roques. Inside dynamics of pulled and pushed fronts, *J. Math. Pures Appl.*, 11:173–188, 2012;

J Coville, O Bonnefon, **J Garnier** et L. Roques. Inside dynamics of nonlocal travelling waves, preprint;