Les problèmes inverses de Calderón et de Gel'fand-Calderón en dimension deux

Matteo Santacesaria

Laboratoire Jean Kuntzmann,
Université Joseph Fourier

JERAA Saint–Étienne
22 Novembre 2013

Le problème de Calderón

Le problème de Calderón

$D \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$	domaine ouvert borné avec bord lisse.
σ	conductivité électrique sur D.

Le problème de Calderón

$D \subset \mathbb{R}^d, d \geqslant 2$	domaine ouvert borné avec bord lisse.
σ	conductivité électrique sur D.

- $\sigma(x)$ matrice symétrique définie positive telle que $c\|\xi\|^2 \leqslant \langle \xi, \sigma(x)\xi \rangle \leqslant C\|\xi\|^2$, pour tout $x \in D$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, où $c, C > 0$.

Le problème de Calderón

$D \subset \mathbb{R}^d, d \geqslant 2$	domaine ouvert borné avec bord lisse.
σ	conductivité électrique sur D.

- $\sigma(x)$ matrice symétrique définie positive telle que $c\|\xi\|^2 \leqslant \langle \xi, \sigma(x)\xi \rangle \leqslant C\|\xi\|^2$, pour tout $x \in D$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, où $c, C > 0$.

$\Lambda_\sigma f = \sigma \nabla u \cdot \nu\|_{\partial D}$	opérateur Dirichlet-à-Neumann. (opérateur tension-à-courant)

- $f \in H^{1/2}(\partial D)$, ν normale extérieure à ∂D, u l'unique solution H^1 de

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } D, \\ u|_{\partial D} = f. \end{cases}$$

Le problème de Calderón

$D \subset \mathbb{R}^d, d \geqslant 2$	domaine ouvert borné avec bord lisse.
σ	conductivité électrique sur D.

- $\sigma(x)$ matrice symétrique définie positive telle que $c\|\xi\|^2 \leqslant \langle \xi, \sigma(x)\xi \rangle \leqslant C\|\xi\|^2$, pour tout $x \in D$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, où $c, C > 0$.

$\Lambda_\sigma f = \sigma \nabla u \cdot \nu\|_{\partial D}$	opérateur Dirichlet-à-Neumann.
	(opérateur tension-à-courant)

- $f \in H^{1/2}(\partial D)$, ν normale extérieure à ∂D, u l'unique solution H^1 de
$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } D, \\ u|_{\partial D} = f. \end{cases}$$

- $\Lambda_\sigma : H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$

Le problème de Calderón

$D \subset \mathbb{R}^d, d \geqslant 2$	domaine ouvert borné avec bord lisse.
σ	conductivité électrique sur D.

- $\sigma(x)$ matrice symétrique définie positive telle que $c\|\xi\|^2 \leqslant \langle \xi, \sigma(x)\xi \rangle \leqslant C\|\xi\|^2$, pour tout $x \in D$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, où $c, C > 0$.

$\Lambda_\sigma f = \sigma \nabla u \cdot \nu|_{\partial D}$	opérateur Dirichlet-à-Neumann. (opérateur tension-à-courant)

- $f \in H^{1/2}(\partial D)$, ν normale extérieure à ∂D, u l'unique solution H^1 de
$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } D, \\ u|_{\partial D} = f. \end{cases}$$

- $\Lambda_\sigma : H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$

Problème de Calderón

Déterminer σ dans D à partir de Λ_σ.

Interprétation physique du problème

Interprétation physique du problème

- Équation de la conductivité (loi d'Ohm + conservation de la charge électrique) :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{dans } D. \tag{1}$$

Interprétation physique du problème

- Équation de la conductivité (loi d'Ohm + conservation de la charge électrique) :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{dans } D. \tag{1}$$

- Action de Λ_σ :

(potentiel au bord) $\qquad f = u|_{\partial D} \mapsto \Lambda_\sigma f \qquad$ (courant associé)

Interprétation physique du problème

- Équation de la conductivité (loi d'Ohm + conservation de la charge électrique) :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{dans } D. \tag{1}$$

- Action de Λ_σ :

(potentiel au bord) $\qquad f = u|_{\partial D} \mapsto \Lambda_\sigma f \qquad$ (courant associé)

- Données au bord, ensemble de Cauchy (graphe de Λ_σ) :

$$\{(u|_{\partial D}, (\sigma \nabla u \cdot \nu)|_{\partial D}) \,|\, u \text{ solution de (1)}\}.$$

C'est l'ensemble de toutes les couples de mesures de potentiel et courant électrique au bord de D.

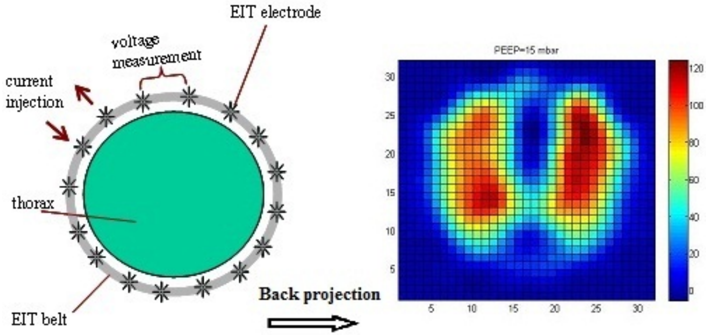
Tomographie d’impedence électrique (EIT)

Tomographie d’impedence électrique (EIT)

Détermination de la ventilation pulmonaire à l’aide de l’EIT

Tomographie d'impedence électrique (EIT)

Détermination de la ventilation pulmonaire à l'aide de l'EIT



Cas isotrope

Cas isotrope

Définition

Une conductivité σ est dite *isotrope* si $\sigma = \sigma(x)I$ pour quelque fonction $\sigma(x)$, où I est la matrice identité.

Cas isotrope

Définition

Une conductivité σ est dite *isotrope* si $\sigma = \sigma(x)I$ pour quelque fonction $\sigma(x)$, où I est la matrice identité. Sinon σ est dite *anisotrope*.

Cas isotrope

Définition

Une conductivité σ est dite *isotrope* si $\sigma = \sigma(x)I$ pour quelque fonction $\sigma(x)$, où I est la matrice identité. Sinon σ est dite *anisotrope*.

Si σ est isotrope et C^2 on peut substituer $\tilde{u} = u\sqrt{\sigma}$ dans $\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0$. On trouve qu'il satisfait la suivante équation de Schrödinger :

$$(-\Delta + v)\tilde{u} = 0 \quad \text{dans } D, \quad \text{où } v = \frac{\Delta \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}},$$

Cas isotrope

Définition

Une conductivité σ est dite *isotrope* si $\sigma = \sigma(x)I$ pour quelque fonction $\sigma(x)$, où I est la matrice identité. Sinon σ est dite *anisotrope*.

Si σ est isotrope et C^2 on peut substituer $\tilde{u} = u\sqrt{\sigma}$ dans $\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0$. On trouve qu'il satisfait la suivante équation de Schrödinger :

$$(-\Delta + v)\tilde{u} = 0 \quad \text{dans } D, \quad \text{où } v = \frac{\Delta\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}},$$

Si Φ_v est l'opérateur Dirichlet-à-Neumann associé à v, on a

$$\Phi_v = \sigma^{-1/2}\left(\Lambda_\sigma \sigma^{-1/2} + \frac{\partial \sigma^{1/2}}{\partial \nu}\right).$$

Le problème de Gel'fand–Calderón

On considère l'équation de Schrödinger à énergie $E \in \mathbb{R}$ fixée,

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

où $v \in L^\infty(D)$ est un *potentiel* (énergie potentielle).

Le problème de Gel'fand–Calderón

On considère l'équation de Schrödinger à énergie $E \in \mathbb{R}$ fixée,

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

où $v \in L^\infty(D)$ est un *potentiel* (énergie potentielle).
Si 0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $-\Delta + v - E$ dans D, on peut définir :

$$\boxed{\Phi_v(E)f = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} \qquad \text{opérateur Dirichlet-à-Neumann}}$$

- $f \in H^{1/2}(\partial D)$, ν normale extérieure à ∂D, u l'unique solution H^1 de

$$\begin{cases} (-\Delta + v)u = Eu & \text{dans } D, \\ u|_{\partial D} = f. \end{cases}$$

Le problème de Gel'fand–Calderón

On considère l'équation de Schrödinger à énergie $E \in \mathbb{R}$ fixée,

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

où $v \in L^\infty(D)$ est un *potentiel* (énergie potentielle).
Si 0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $-\Delta + v - E$ dans D, on peut définir :

$$\boxed{\Phi_v(E)f = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} \qquad \text{opérateur Dirichlet-à-Neumann}}$$

- $f \in H^{1/2}(\partial D)$, ν normale extérieure à ∂D, u l'unique solution H^1 de

$$\begin{cases} (-\Delta + v)u = Eu & \text{dans } D, \\ u|_{\partial D} = f. \end{cases}$$

Problème de Gel'fand–Calderón

Déterminer v dans D à partir de $\Phi_v(E)$ à $E \in \mathbb{R}$ fixée.

Motivations

Motivations

Énergie positive ($E > 0$) : tomographie acoustique

- équation des ondes *time-harmonic* (équation d'Helmholtz) pour la pression acoustique

Motivations

Énergie positive ($E > 0$) : tomographie acoustique

- équation des ondes *time-harmonic* (équation d'Helmholtz) pour la pression acoustique
- reconstruction de la densité d'un liquide et de la vitesse de propagation des ondes sonores à partir des données au bord

Cas multi-canal (*multi-channel*)

Cas multi-canal (*multi-channel*)

Équation de Schrödinger multi-canal à énergie $E \in \mathbb{R}$:

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

- v et ψ prennent leurs valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices $n \times n$.

Cas multi-canal (*multi-channel*)

Équation de Schrödinger multi-canal à énergie $E \in \mathbb{R}$:

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

- v et ψ prennent leurs valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices $n \times n$.

Motivation : approximation de l'équation 3D.

Cas multi-canal (*multi-channel*)

Équation de Schrödinger multi-canal à énergie $E \in \mathbb{R}$:

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

- v et ψ prennent leurs valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices $n \times n$.

Motivation : approximation de l'équation 3D.

- L'équation de Schrödinger dans un domaine cylindrique $D \times L$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $L = [a, b] \subset \mathbb{R}$, est équivalente à un système de dimension infinie d'équations dans D.

Cas multi-canal (*multi-channel*)

Équation de Schrödinger multi-canal à énergie $E \in \mathbb{R}$:

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

- v et ψ prennent leurs valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices $n \times n$.

Motivation : approximation de l'équation 3D.

- L'équation de Schrödinger dans un domaine cylindrique $D \times L$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $L = [a, b] \subset \mathbb{R}$, est équivalente à un système de dimension infinie d'équations dans D.
- Avantage principal : le problème en dimension deux n'est pas surdéterminé. Φ et v dépendent du même nombre de variables, alors que c'est faux en dimension supérieure.

Cas multi-canal (*multi-channel*)

Équation de Schrödinger multi-canal à énergie $E \in \mathbb{R}$:

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

- v et ψ prennent leurs valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices $n \times n$.

Motivation : approximation de l'équation 3D.

- L'équation de Schrödinger dans un domaine cylindrique $D \times L$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $L = [a, b] \subset \mathbb{R}$, est équivalente à un système de dimension infinie d'équations dans D.
- Avantage principal : le problème en dimension deux n'est pas surdéterminé. Φ et v dépendent du même nombre de variables, alors que c'est faux en dimension supérieure.
  (si $D \subset \mathbb{R}^n$, Φ dépende de $2(n-1)$ variables et v de n)

Questions

Questions

- Unicité :
  - injectivité de $\sigma \mapsto \Lambda_\sigma$ (problème de Calderón),
  - injectivité de $v \mapsto \Phi_v(E)$ (problème de Gel'fand Calderón).

Questions

- Unicité :
  - injectivité de $\sigma \mapsto \Lambda_\sigma$ (problème de Calderón),
  - injectivité de $v \mapsto \Phi_v(E)$ (problème de Gel'fand Calderón).
- Reconstruction

Questions

- Unicité :
  - injectivité de $\sigma \mapsto \Lambda_\sigma$ (problème de Calderón),
  - injectivité de $v \mapsto \Phi_v(E)$ (problème de Gel'fand Calderón).
- Reconstruction
- Stabilité :
  - il existe f telle que

$$\|\sigma_2 - \sigma_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant f(\|\Lambda_2 - \Lambda_1\|),$$

    $f(t) \to 0$ lorsque $t \to 0^+$ (problème de Calderón).
  - il existe f telle que

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant f(\|\Phi_2(E) - \Phi_1(E)\|),$$

    $f(t) \to 0$ lorsque $t \to 0^+$ (problème de Gel'fand Calderón).

Remarques historiques pour Calderón

Remarques historiques pour Calderón

Première formulation précise : Calderón (1980).

Remarques historiques pour Calderón

Première formulation précise : Calderón (1980).
Formulations similaires : Slichter (1933), Tikhonov (1949), Druskin (1982).

Remarques historiques pour Calderón

Première formulation précise : Calderón (1980).
Formulations similaires : Slichter (1933), Tikhonov (1949), Druskin (1982).

Premiers résultats globaux pour le problème de Calderón isotrope

Remarques historiques pour Calderón

Première formulation précise : Calderón (1980).
Formulations similaires : Slichter (1933), Tikhonov (1949), Druskin (1982).

Premiers résultats globaux pour le problème de Calderón isotrope

$D \subset \mathbb{R}^d$	$d = 2$	$d \geqslant 3$
Unicité :	Nachman (1996)	Sylvester-Uhlmann (1987)
Reconstruction :	Novikov (1988), Nachman (1996)	Novikov (1988)
Stabilité :	Liu (1997)	Alessandrini (1988)

Remarques historiques pour Calderón

Première formulation précise : Calderón (1980).
Formulations similaires : Slichter (1933), Tikhonov (1949), Druskin (1982).

Premiers résultats globaux pour le problème de Calderón isotrope

$D \subset \mathbb{R}^d$	$d = 2$	$d \geqslant 3$
Unicité :	Nachman (1996)	Sylvester-Uhlmann (1987)
Reconstruction :	Novikov (1988), Nachman (1996)	Novikov (1988)
Stabilité :	Liu (1997)	Alessandrini (1988)

Unicité pour $\sigma \in L^\infty(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$: Astala-Paivarinta (2006).
Unicité pour $\sigma \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$: Haberman-Tataru (2011).

Remarques historiques pour Calderón

Première formulation précise : Calderón (1980).
Formulations similaires : Slichter (1933), Tikhonov (1949), Druskin (1982).

Premiers résultats globaux pour le problème de Calderón isotrope

$D \subset \mathbb{R}^d$	$d = 2$	$d \geqslant 3$
Unicité :	Nachman (1996)	Sylvester-Uhlmann (1987)
Reconstruction :	Novikov (1988), Nachman (1996)	Novikov (1988)
Stabilité :	Liu (1997)	Alessandrini (1988)

Unicité pour $\sigma \in L^\infty(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$: Astala-Paivarinta (2006).
Unicité pour $\sigma \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$: Haberman-Tataru (2011).
Unicité pour $\sigma \in L^\infty(D)$, $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$: **problème ouvert**.

Remarques historiques pour Gel′fand-Calderón

Remarques historiques pour Gel′fand-Calderón

Première formulation : Gel′fand (1954).

Remarques historiques pour Gel'fand-Calderón

Première formulation : Gel'fand (1954).

Premiers résultats globaux :

$D \subset \mathbb{R}^d$	$d = 2$	$d \geqslant 3$
Unicité :	Bukhgeim (2008)	Novikov (1988)
Reconstruction :	Bukhgeim (2008)	Novikov (1988)
Stabilité :	Novikov-S. (2010)	Alessandrini (1988)

Remarques historiques pour Gel'fand-Calderón

Première formulation : Gel'fand (1954).

Premiers résultats globaux :

$D \subset \mathbb{R}^d$	$d = 2$	$d \geqslant 3$
Unicité :	Bukhgeim (2008)	Novikov (1988)
Reconstruction :	Bukhgeim (2008)	Novikov (1988)
Stabilité :	Novikov-S. (2010)	Alessandrini (1988)

En dimension deux, unicité pour des potentiel L^p, $p > 2$: Imanuvilov-Yamamoto (2012).

Techniques utilisées en dimension $d \geqslant 3$

Ingrédient principal : famille de fonctions $\psi(x,k)$, avec $x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{C}^d, k^2 = k_1^2 + \ldots + k_d^2 = E$ satisfaisant

- $(-\Delta + v(x))\psi = E\psi$ dans $\mathbb{R}^d$,
- $\psi(x,k) \to e^{ixk}$ pour $|x| \to +\infty$.

Techniques utilisées en dimension $d \geqslant 3$

Ingrédient principal : famille de fonctions $\psi(x,k)$, avec $x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{C}^d, k^2 = k_1^2 + \ldots + k_d^2 = E$ satisfaisant

- $(-\Delta + v(x))\psi = E\psi$ dans $\mathbb{R}^d$,
- $\psi(x,k) \to e^{ixk}$ pour $|x| \to +\infty$.

Fonctions introduites par Faddeev (1965) pour le problème inverse de diffusion (redécouvertes par Beals-Coifman, Sylvester-Uhlmann). Connues comme *complex geometrical optics solutions*.

Techniques utilisées en dimension $d \geqslant 3$

Ingrédient principal : famille de fonctions $\psi(x,k)$, avec $x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{C}^d, k^2 = k_1^2 + \ldots + k_d^2 = E$ satisfaisant

- $(-\Delta + v(x))\psi = E\psi$ dans $\mathbb{R}^d$,
- $\psi(x,k) \to e^{ixk}$ pour $|x| \to +\infty$.

Fonctions introduites par Faddeev (1965) pour le problème inverse de diffusion (redécouvertes par Beals-Coifman, Sylvester-Uhlmann). Connues comme *complex geometrical optics solutions*.

L'amplitude de diffusion généralisée $h(k,l)$, $k,l \in \mathbb{C}^d$, $k^2 = l^2 = E$, $\mathrm{Im}\, k = \mathrm{Im}\, l$, est définie comme

$$h(k,l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx}\psi(x,k)v(x)dx$$

Techniques utilisées en dimension $d \geqslant 3$

- h peut être reconstruite à partir de l'opérateur Dirichlet à Neumann en dimension $d \geqslant 2$ (Novikov 1988).

Techniques utilisées en dimension $d \geqslant 3$

- h peut être reconstruite à partir de l'opérateur Dirichlet à Neumann en dimension $d \geqslant 2$ (Novikov 1988).
- v est déterminé par h grâce à la limite suivante :

$$\hat{v}(p) = \lim_{\substack{|k|, |l| \to +\infty, \\ k - l = p \in \mathbb{R}^d \\ k^2 = l^2 = E \\ \operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l}} h(k, l).$$

En dimension $d \geqslant 3$ pour tout $p \in \mathbb{R}^d$ on peut trouver k, l convenables, mais pas en dimension 2.

Techniques utilisées en dimension $d \geqslant 3$

- h peut être reconstruite à partir de l'opérateur Dirichlet à Neumann en dimension $d \geqslant 2$ (Novikov 1988).
- v est déterminé par h grâce à la limite suivante :

$$\hat{v}(p) = \lim_{\substack{|k|,|l| \to +\infty, \\ k-l=p \in \mathbb{R}^d \\ k^2 = l^2 = E \\ \operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l}} h(k,l).$$

  En dimension $d \geqslant 3$ pour tout $p \in \mathbb{R}^d$ on peut trouver k, l convenables, mais pas en dimension 2.
- Avec des méthodes d'analyse complexe (équation $\bar{\partial}$), h détermine $v = \Delta\sqrt{\sigma}/\sqrt{\sigma}$ sur le plan (Nachman 1996).

Techniques en dimension 2

Techniques en dimension 2

$$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}, \qquad z = x_1 + ix_2, \qquad \bar{z} = x_1 - ix_2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Techniques en dimension 2

$$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}, \qquad z = x_1 + ix_2, \qquad \bar{z} = x_1 - ix_2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Objet fondamental : famille de fonctions $\psi_{z_0}(z, \lambda)$, $z, z_0 \in D$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Techniques en dimension 2

$$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}, \qquad z = x_1 + ix_2, \qquad \bar{z} = x_1 - ix_2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Objet fondamental : famille de fonctions $\psi_{z_0}(z, \lambda)$, $z, z_0 \in D$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $(-\Delta + v)\psi_{z_0} = 0$ dans D.

Techniques en dimension 2

$$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}, \qquad z = x_1 + ix_2, \qquad \bar{z} = x_1 - ix_2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Objet fondamental : famille de fonctions $\psi_{z_0}(z,\lambda)$, $z, z_0 \in D$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $(-\Delta + v)\psi_{z_0} = 0$ dans D.
- $\psi_{z_0}(z,\lambda) \to e^{\lambda(z-z_0)^2} I$, lorsque $\lambda \to \infty$ et I est la matrice identité.

Techniques en dimension 2

$$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}, \qquad z = x_1 + ix_2, \qquad \bar{z} = x_1 - ix_2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Objet fondamental : famille de fonctions $\psi_{z_0}(z,\lambda)$, $z, z_0 \in D$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $(-\Delta + v)\psi_{z_0} = 0$ dans D.
- $\psi_{z_0}(z,\lambda) \to e^{\lambda(z-z_0)^2} I$, lorsque $\lambda \to \infty$ et I est la matrice identité.

Ces fonctions sont appelées *les analogues de Bukhgeim des solutions de Faddeev*.

Techniques en dimension 2

Soit v un potentiel matriciel de taille n. On définit :

- $\psi_{z_0}(z,\lambda) = e^{\lambda(z-z_0)^2}\mu_{z_0}(z,\lambda)$,

Techniques en dimension 2

Soit v un potentiel matriciel de taille n. On définit :

- $\psi_{z_0}(z,\lambda) = e^{\lambda(z-z_0)^2}\mu_{z_0}(z,\lambda)$,
- $\mu_{z_0}(z,\lambda) = I + \int_D g_{z_0}(z,\zeta,\lambda)v(\zeta)\mu_{z_0}(\zeta,\lambda)d\mathrm{Re}\zeta\, d\mathrm{Im}\zeta$,
  pour $z, z_0 \in \bar{D}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

Techniques en dimension 2

Soit v un potentiel matriciel de taille n. On définit :

- $\psi_{z_0}(z,\lambda) = e^{\lambda(z-z_0)^2}\mu_{z_0}(z,\lambda)$,
- $\mu_{z_0}(z,\lambda) = I + \int_D g_{z_0}(z,\zeta,\lambda)v(\zeta)\mu_{z_0}(\zeta,\lambda)d\mathrm{Re}\zeta\, d\mathrm{Im}\zeta$,
  pour $z, z_0 \in \bar{D}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
- $g_{z_0}(z,\zeta,\lambda) = \frac{e^{\lambda(\zeta-z_0)^2-\bar{\lambda}(\bar{\zeta}-\bar{z}_0)^2}}{4\pi^2}\int_D \frac{e^{-\lambda(\eta-z_0)^2+\bar{\lambda}(\bar{\eta}-\bar{z}_0)^2}}{(z-\eta)(\bar{\eta}-\bar{\zeta})}d\mathrm{Re}\eta\, d\mathrm{Im}\eta$,
  est une fonction de Green de $4\left(\frac{\partial}{\partial z}+2\lambda(z-z_0)\right)\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ dans D, pour $z_0 \in D$.

Techniques en dimension 2

Soit v un potentiel matriciel de taille n. On définit :

- $\psi_{z_0}(z,\lambda) = e^{\lambda(z-z_0)^2}\mu_{z_0}(z,\lambda)$,
- $\mu_{z_0}(z,\lambda) = I + \int_D g_{z_0}(z,\zeta,\lambda)v(\zeta)\mu_{z_0}(\zeta,\lambda)d\mathrm{Re}\zeta\, d\mathrm{Im}\zeta$, pour $z, z_0 \in \bar{D}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
- $g_{z_0}(z,\zeta,\lambda) = \frac{e^{\lambda(\zeta-z_0)^2-\bar{\lambda}(\bar{\zeta}-\bar{z}_0)^2}}{4\pi^2}\int_D \frac{e^{-\lambda(\eta-z_0)^2+\bar{\lambda}(\bar{\eta}-\bar{z}_0)^2}}{(z-\eta)(\bar{\eta}-\bar{\zeta})}d\mathrm{Re}\eta\, d\mathrm{Im}\eta$, est une fonction de Green de $4\left(\frac{\partial}{\partial z}+2\lambda(z-z_0)\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ dans D, pour $z_0 \in D$.
- $h_{z_0}(\lambda) = \int_D e^{\lambda(z-z_0)^2-\bar{\lambda}(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}v(z)\mu_{z_0}(z,\lambda)d\mathrm{Re}z\, d\mathrm{Im}z$, pour $z_0 \in \bar{D}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ est l'*analogue de Bukhgeim de l'amplitude de diffusion généralisée de Faddeev*.

Unicité et reconstruction dans le cas multi-canal

Theorème 1 (Novikov-S. 2011)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné à bord C^2 et soit $v \in C^1(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ satisfaisant la condition (DE) et $v|_{\partial D} = 0$. Considérons, pour $z_0 \in D$, les fonctions h_{z_0}, ψ_{z_0}, g_{z_0} et Φ, Φ_0 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann associés aux potentiels v et 0, respectivement.

Unicité et reconstruction dans le cas multi-canal

Theorème 1 (Novikov-S. 2011)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné à bord C^2 et soit $v \in C^1(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ satisfaisant la condition (DE) et $v|_{\partial D} = 0$. Considérons, pour $z_0 \in D$, les fonctions h_{z_0}, ψ_{z_0}, g_{z_0} et Φ, Φ_0 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann associés aux potentiels v et 0, respectivement.

Condition (DE)

0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $-\Delta + v - E$ dans D

Unicité et reconstruction dans le cas multi-canal

Theorème 1 (Novikov-S. 2011)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné à bord C^2 et soit $v \in C^1(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ satisfaisant la condition (DE) et $v|_{\partial D} = 0$. Considérons, pour $z_0 \in D$, les fonctions h_{z_0}, ψ_{z_0}, g_{z_0} et Φ, Φ_0 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann associés aux potentiels v et 0, respectivement. Alors on a les formules de reconstruction et l'équation suivantes :

$$v(z_0) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{2}{\pi} |\lambda| h_{z_0}(\lambda),$$

Condition (DE)

0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $-\Delta + v - E$ dans D

Unicité et reconstruction dans le cas multi-canal

Theorème 1 (Novikov-S. 2011)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné à bord C^2 et soit $v \in C^1(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ satisfaisant la condition (DE) et $v|_{\partial D} = 0$. Considérons, pour $z_0 \in D$, les fonctions h_{z_0}, ψ_{z_0}, g_{z_0} et Φ, Φ_0 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann associés aux potentiels v et 0, respectivement. Alors on a les formules de reconstruction et l'équation suivantes :

$$v(z_0) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{2}{\pi} |\lambda| h_{z_0}(\lambda),$$

$$h_{z_0}(\lambda) = \int_{\partial D} e^{-\bar{\lambda}(\bar{z} - \bar{z}_0)^2} (\Phi - \Phi_0) \psi_{z_0}(z, \lambda) |dz|,$$

Condition (DE)

0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $-\Delta + v - E$ dans D

Unicité et reconstruction dans le cas multi-canal

Theorème 1 (Novikov-S. 2011)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné à bord C^2 et soit $v \in C^1(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ satisfaisant la condition (DE) et $v|_{\partial D} = 0$. Considérons, pour $z_0 \in D$, les fonctions h_{z_0}, ψ_{z_0}, g_{z_0} et Φ, Φ_0 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann associés aux potentiels v et 0, respectivement. Alors on a les formules de reconstruction et l'équation suivantes :

$$v(z_0) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{2}{\pi} |\lambda| h_{z_0}(\lambda),$$

$$h_{z_0}(\lambda) = \int_{\partial D} e^{-\bar{\lambda}(\bar{z}-\bar{z}_0)^2} (\Phi - \Phi_0) \psi_{z_0}(z, \lambda) |dz|,$$

$$\psi_{z_0}(z, \lambda)|_{\partial D} = e^{\lambda(z-z_0)^2} I + \int_{\partial D} G_{z_0}(z, \zeta, \lambda)(\Phi - \Phi_0)\psi_{z_0}(\zeta, \lambda)|d\zeta|.$$

Condition (DE)

0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $-\Delta + v - E$ dans D

Unicité dans le cas multi-canal

- $G_{z_0}(z,\zeta,\lambda) = e^{\lambda(z-z_0)^2} g_{z_0}(z,\zeta,\lambda) e^{-\lambda(\zeta-z_0)^2}$,

Unicité dans le cas multi-canal

- $G_{z_0}(z,\zeta,\lambda) = e^{\lambda(z-z_0)^2} g_{z_0}(z,\zeta,\lambda) e^{-\lambda(\zeta-z_0)^2}$,
- $|\lambda| > \rho_1(D, N_1, n)$, où $\|v\|_{C^1_{\bar z}(\bar D, M_n(\mathbb{C}))} < N_1$.

Unicité dans le cas multi-canal

- $G_{z_0}(z,\zeta,\lambda) = e^{\lambda(z-z_0)^2} g_{z_0}(z,\zeta,\lambda) e^{-\lambda(\zeta-z_0)^2}$,
- $|\lambda| > \rho_1(D, N_1, n)$, où $\|v\|_{C^1_{\bar{z}}(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))} < N_1$.

Corollaire (Unicité)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert borné à bord C^2, soient $v_1, v_2 \in C^1(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ deux potentiels à valeurs matricielles satisfaisant la condition (DE) et Φ_1, Φ_2 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondants.

$$\boxed{\text{Si } \Phi_1 = \Phi_2 \text{ alors } v_1 = v_2.}$$

Unicité dans le cas multi-canal

- $G_{z_0}(z,\zeta,\lambda) = e^{\lambda(z-z_0)^2} g_{z_0}(z,\zeta,\lambda) e^{-\lambda(\zeta-z_0)^2}$,
- $|\lambda| > \rho_1(D, N_1, n)$, où $\|v\|_{C^1_{\bar{z}}(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))} < N_1$.

Corollaire (Unicité)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert borné à bord C^2, soient $v_1, v_2 \in C^1(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ deux potentiels à valeurs matricielles satisfaisant la condition (DE) et Φ_1, Φ_2 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondants.

$$\boxed{\text{Si } \Phi_1 = \Phi_2 \text{ alors } v_1 = v_2.}$$

Point faible du Théorème 5 : instabilité de la reconstruction.

Stabilité multi-canal pour Gel'fand-Calderón

Stabilité multi-canal pour Gel'fand-Calderón

Theorème 2 (S. 2011)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert borné à bord C^2, soient $v_1, v_2 \in C^2(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ deux potentiels à valeurs matricielles satisfaisant la condition (DE) à énergie 0, avec $\|v_j\|_{C^2(\bar{D})} \leqslant N$ pour $j = 1, 2$, et Φ_1, Φ_2 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondants à énergie 0. Supposons pour simplicité que $v_1|_{\partial D} = v_2|_{\partial D}$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} v_1|_{\partial D} = \frac{\partial}{\partial \nu} v_2|_{\partial D}$ pour $j = 1, 2$.

Stabilité multi-canal pour Gel'fand-Calderón

Theorème 2 (S. 2011)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ *un domaine ouvert borné à bord* C^2*, soient* $v_1, v_2 \in C^2(\bar{D}, M_n(\mathbb{C}))$ *deux potentiels à valeurs matricielles satisfaisant la condition (DE) à énergie* 0*, avec* $\|v_j\|_{C^2(\bar{D})} \leqslant N$ *pour* $j = 1, 2$*, et* Φ_1, Φ_2 *les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondants à énergie* 0*. Supposons pour simplicité que* $v_1|_{\partial D} = v_2|_{\partial D}$ *et* $\frac{\partial}{\partial \nu} v_1|_{\partial D} = \frac{\partial}{\partial \nu} v_2|_{\partial D}$ *pour* $j = 1, 2$*.*
Alors il existe une constante $C = C(D, N, n)$ *telle que*

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant C(\log(3 + \|\Phi_2 - \Phi_1\|^{-1}))^{-\frac{3}{4}} \log(3 \log(3 + \|\Phi_2 - \Phi_1\|^{-1}))^2,$$

où $\|\cdot\|$ *dénote la norme induite d'un opérateur défini sur* $L^\infty(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ *et* $\|v\|_{L^\infty(D)} = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \|v_{i,j}\|_{L^\infty(D)}$ *(pareil pour* $\|v\|_{C^2(\bar{D})}$*) pour un potentiel* v *à valeurs matricielles.*

Problème mal posé

Problème mal posé

Mandache (2001) et Isaev (2011) : pour E fixée, on ne peut pas avoir une inégalité du type

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant c(\log(3 + \|\Phi_2(E) - \Phi_1(E)\|_*^{-1}))^{-\alpha}, \tag{2}$$

pour $\alpha > m$, si $v_1, v_2 \in C^m(D, \mathbb{C})$ et $\Phi_1(E), \Phi_2(E)$ les opérateurs correspondants ($\| \cdot \|_* = \| \cdot \|_{H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)}$).

- Dans toutes les estimées (jusqu'à récemment) $0 < \alpha < 1$.

Problème mal posé

Mandache (2001) et Isaev (2011) : pour E fixée, on ne peut pas avoir une inégalité du type

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant c(\log(3 + \|\Phi_2(E) - \Phi_1(E)\|_*^{-1}))^{-\alpha}, \qquad (2)$$

pour $\alpha > m$, si $v_1, v_2 \in C^m(D, \mathbb{C})$ et $\Phi_1(E), \Phi_2(E)$ les opérateurs correspondants ($\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)}$).

- Dans toutes les estimées (jusqu'à récemment) $0 < \alpha < 1$.

Questions :

- Est-il possible d'améliorer α dans (2) en supposant les potentiels suffisamment réguliers ?
- Quel est le comportement de l'estimée (2) par rapport à E ?

Algorithmes de reconstruction stables et rapidement convergents

Algorithmes de reconstruction stables et rapidement convergents

Idée principale : considérer l'équation de Schrödinger **multi-canal**

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

pour $E > 0$ suffisamment grand.

Algorithmes de reconstruction stables et rapidement convergents

Idée principale : considérer l'équation de Schrödinger **multi-canal**

$$(-\Delta + v)\psi = E\psi \quad \text{dans } D,$$

pour $E > 0$ suffisamment grand.

Nous avons montré que

$$\Phi(E) \xrightarrow{\text{Lipschitz}} v_{appr}(\cdot, E),$$
$$\|v_{appr}(\cdot, E) - v(\cdot)\|_{L^\infty(D)} \leqslant O(E^{-(m-2)/2}),$$

pour E suffisamment grand, où m est lié à la régularité de v.

Résultat de convergence

Theorème 3 (Novikov-S. 2011)

Soit $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2, M_n(\mathbb{C}))$, $m \geqslant 3$, $\operatorname{supp} v \subset D$ et soit $\Phi(E)$ l'opérateur Dirichlet-à-Neumann correspondant à énergie fixée E, où $E \geqslant E_2$ et E n'est pas une valeur propre de Dirichlet de $-\Delta + v$ et de $-\Delta$ dans D.

Résultat de convergence

Theorème 3 (Novikov-S. 2011)

Soit $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2, M_n(\mathbb{C}))$, $m \geqslant 3$, $\operatorname{supp} v \subset D$ *et soit* $\Phi(E)$ *l'opérateur Dirichlet-à-Neumann correspondant à énergie fixée* E, *où* $E \geqslant E_2$ *et* E *n'est pas une valeur propre de Dirichlet de* $-\Delta + v$ *et de* $-\Delta$ *dans* D.
Alors v *est reconstruit à partir de* $\Phi(E)$ *avec une stabilité Lipschitz par l'Algorithme 1 avec une erreur de* $O(E^{-(m-2)/2})$ *dans la norme uniforme, lorsque* $E \to +\infty$.

Résultat de convergence

Theorème 3 (Novikov-S. 2011)

Soit $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2, M_n(\mathbb{C}))$, $m \geqslant 3$, $\operatorname{supp} v \subset D$ *et soit* $\Phi(E)$ *l'opérateur Dirichlet-à-Neumann correspondant à énergie fixée* E*, où* $E \geqslant E_2$ *et* E *n'est pas une valeur propre de Dirichlet de* $-\Delta + v$ *et de* $-\Delta$ *dans* D*.*
Alors v *est reconstruit à partir de* $\Phi(E)$ *avec une stabilité Lipschitz par l'Algorithme 1 avec une erreur de* $O(E^{-(m-2)/2})$ *dans la norme uniforme, lorsque* $E \to +\infty$*.*

- Algorithme nouveau avec applications concrètes, notamment pour l'approximation 3D. Testé en ce moment par une équipe de Moscow State University guidée par Prof. Burov.

Résultat de convergence

Theorème 3 (Novikov-S. 2011)

Soit $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2, M_n(\mathbb{C}))$, $m \geqslant 3$, $\operatorname{supp} v \subset D$ et soit $\Phi(E)$ l'opérateur Dirichlet-à-Neumann correspondant à énergie fixée E, où $E \geqslant E_2$ et E n'est pas une valeur propre de Dirichlet de $-\Delta + v$ et de $-\Delta$ dans D.
Alors v est reconstruit à partir de $\Phi(E)$ avec une stabilité Lipschitz par l'Algorithme 1 avec une erreur de $O(E^{-(m-2)/2})$ dans la norme uniforme, lorsque $E \to +\infty$.

- Algorithme nouveau avec applications concrètes, notamment pour l'approximation 3D. Testé en ce moment par une équipe de Moscow State University guidée par Prof. Burov.
- Techniques utilisée : $\bar\partial$, méthode du problème de Riemann-Hilbert non local, problème inverse de diffusion.

Estimées à énergie $E > 0$

Hypothèses :

Estimées à énergie $E > 0$

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,

Estimées à énergie $E > 0$

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,
2. $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ pour quelque $m > 2$, $\quad \bar{v} = v$, $\quad$ supp $v \subset D$,

Estimées à énergie $E > 0$

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,
2. $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ pour quelque $m > 2$, $\quad \bar{v} = v$, $\quad$ supp $v \subset D$,
3. $E > E_1(\|v\|_{m,1}, D)$ $\quad$ (condition de régularité)

Estimées à énergie $E > 0$

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\partial D \in C^2$,
2. $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ pour quelque $m > 2$, $\bar{v} = v$, $\operatorname{supp} v \subset D$,
3. $E > E_1(\|v\|_{m,1}, D)$ (condition de régularité)

Theorème 4 – première partie (S. 2013)

Soient v_1, v_2 deux potentiels satisfaisant ces hypothèses et $\Phi_1(E)$, $\Phi_2(E)$ les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondants, à une énergie positive fixée $E > 0$. Soit $\|v_j\|_{m,1} \leqslant N$, $j = 1, 2$, pour quelque $N > 0$.

Estimées à énergie $E > 0$

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,
2. $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ pour quelque $m > 2$, $\quad \bar{v} = v$, $\quad$ supp $v \subset D$,
3. $E > E_1(\|v\|_{m,1}, D)$ $\quad$ (condition de régularité)

Theorème 4 – première partie (S. 2013)

Soient v_1, v_2 deux potentiels satisfaisant ces hypothèses et $\Phi_1(E)$, $\Phi_2(E)$ les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondants, à une énergie positive fixée $E > 0$. Soit $\|v_j\|_{m,1} \leqslant N$, $j = 1, 2$, pour quelque $N > 0$.
Alors il existe $c_1 = c_1(E, D, N, m)$ telle que

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant c_1 (\log(3 + \|\Phi_2(E) - \Phi_1(E)\|_*^{-1}))^{-\alpha},$$

avec $\alpha = m - 2$.

Estimées à énergie $E > 0$

Theorème 4 – deuxième partie (S. 2013)

De plus, il existe $c_2 = c_2(D, N, m)$ *telle que quel que soit* $0 < \tau \leqslant 1$, *nous avons*

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant c_2 \left(E\delta^\tau + \left(\sqrt{E} + (1-\tau)\log(3+\delta^{-1}) \right)^{-(m-2)} \right),$$

où $\delta = \|\Phi_2(E) - \Phi_1(E)\|_*$.

Estimées à énergie $E > 0$

Theorème 4 – deuxième partie (S. 2013)

De plus, il existe $c_2 = c_2(D, N, m)$ *telle que quel que soit* $0 < \tau \leqslant 1$, *nous avons*

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant c_2 \left(E\delta^\tau + \left(\sqrt{E} + (1-\tau)\log(3+\delta^{-1}) \right)^{-(m-2)} \right),$$

où $\delta = \|\Phi_2(E) - \Phi_1(E)\|_*$.

Remarques :

- La partie Hölder croit linéairement avec l'énergie.
- Cohérent avec l'algorithme de reconstruction Lipschitz stable ($\tau = 1$).

Estimées à énergie zero – Gel'fand-Calderón

Hypothèses :

Estimées à énergie zero – Gel'fand-Calderón

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,

Estimées à énergie zero – Gel'fand-Calderón

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,
2. $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ pour quelque $m > 2$, $\quad \operatorname{supp} v \subset D$,

Estimées à énergie zero – Gel'fand-Calderón

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,
2. $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ pour quelque $m > 2$, $\quad \operatorname{supp} v \subset D$,
3. $v = \frac{\Delta \sigma^{1/2}}{\sigma^{1/2}}$, pour quelque $\sigma \in L^\infty(D)$, avec $\sigma \geqslant \sigma_{\min} > 0$.

Estimées à énergie zero – Gel'fand-Calderón

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,
2. $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ pour quelque $m > 2$, $\quad \operatorname{supp} v \subset D$,
3. $v = \frac{\Delta \sigma^{1/2}}{\sigma^{1/2}}$, pour quelque $\sigma \in L^\infty(D)$, avec $\sigma \geqslant \sigma_{\min} > 0$.

Theorème 5 (S. 2011)

Supposons que ces hypothèses sont satisfaites par deux potentiels v_1, v_2, où D est fixé, et soient Φ_1, Φ_2 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondants. Supposons que $\|v_j\|_{m,1} \leqslant N$, $j = 1, 2$, pour quelque $N > 0$.

Estimées à énergie zero – Gel'fand-Calderón

Hypothèses :

1. D est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$, $\quad \partial D \in C^2$,
2. $v \in W^{m,1}(\mathbb{R}^2)$ pour quelque $m > 2$, $\quad$ supp $v \subset D$,
3. $v = \frac{\Delta \sigma^{1/2}}{\sigma^{1/2}}$, pour quelque $\sigma \in L^\infty(D)$, avec $\sigma \geqslant \sigma_{\min} > 0$.

Theorème 5 (S. 2011)

Supposons que ces hypothèses sont satisfaites par deux potentiels v_1, v_2, où D est fixé, et soient Φ_1, Φ_2 les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondants. Supposons que $\|v_j\|_{m,1} \leqslant N$, $j = 1, 2$, pour quelque $N > 0$.

Alors il existe une constante $C = C(D, N, m)$ telle que

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant C(\log(3 + \|\Phi_2 - \Phi_1\|_*^{-1}))^{-\alpha}, \quad \text{où } \alpha = m - 2$$

et $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)}$.

Estimées à énergie zero – Calderón

Theorème 6 (S. 2011)

Soient σ_1, σ_2 *deux conductivités isotropes telles que* $\Delta(\sigma_j^{1/2})/\sigma_j^{1/2}$ *satisfait l'hypothèse 2, où D est fixé et* $0 < \sigma_{\min} \leqslant \sigma_j \leqslant \sigma_{\max} < +\infty$ *pour* $j = 1, 2$ *pour quelques constantes* $\sigma_{\min}$ *et* $\sigma_{\max}$. *Soient* Λ_1, Λ_2 *les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondant et* $\|\Delta(\sigma_j^{1/2})/\sigma_j^{1/2}\|_{m,1} \leqslant N$, $j = 1, 2$, *pour quelque* $N > 0$. *Supposons de plus que* $\operatorname{supp}(\sigma_j - 1) \subset D$ *pour* $j = 1, 2$.

Estimées à énergie zero – Calderón

Theorème 6 (S. 2011)

Soient σ_1, σ_2 *deux conductivités isotropes telles que* $\Delta(\sigma_j^{1/2})/\sigma_j^{1/2}$ *satisfait l'hypothèse 2, où* D *est fixé et* $0 < \sigma_{\min} \leqslant \sigma_j \leqslant \sigma_{\max} < +\infty$ *pour* $j = 1, 2$ *pour quelques constantes* $\sigma_{\min}$ *et* $\sigma_{\max}$*. Soient* Λ_1, Λ_2 *les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondant et* $\|\Delta(\sigma_j^{1/2})/\sigma_j^{1/2}\|_{m,1} \leqslant N$, $j = 1, 2$, *pour quelque* $N > 0$*. Supposons de plus que* $\mathrm{supp}\,(\sigma_j - 1) \subset D$ *pour* $j = 1, 2$*. Alors, quel que soit* $\alpha < m$ *il existe* $C = C(D, N, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}, m, \alpha)$ *telle que*

$$\|\sigma_2 - \sigma_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant C(\log(3 + \|\Lambda_2 - \Lambda_1\|_*^{-1}))^{-\alpha}.$$

Estimées à énergie zero – Calderón

Theorème 6 (S. 2011)

Soient σ_1, σ_2 *deux conductivités isotropes telles que* $\Delta(\sigma_j^{1/2})/\sigma_j^{1/2}$ *satisfait l'hypothèse 2, où* D *est fixé et* $0 < \sigma_{\min} \leqslant \sigma_j \leqslant \sigma_{\max} < +\infty$ *pour* $j = 1,2$ *pour quelques constantes* $\sigma_{\min}$ *et* $\sigma_{\max}$*. Soient* Λ_1, Λ_2 *les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondant et* $\|\Delta(\sigma_j^{1/2})/\sigma_j^{1/2}\|_{m,1} \leqslant N$, $j = 1,2$, *pour quelque* $N > 0$*. Supposons de plus que* $\operatorname{supp}(\sigma_j - 1) \subset D$ *pour* $j = 1,2$*. Alors, quel que soit* $\alpha < m$ *il existe* $C = C(D, N, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}, m, \alpha)$ *telle que*

$$\|\sigma_2 - \sigma_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant C(\log(3 + \|\Lambda_2 - \Lambda_1\|_*^{-1}))^{-\alpha}.$$

- Caractéristique principale de ces estimées : $\alpha \to +\infty$ lorsque $m \to +\infty$. Dans toutes les estimées précédents en dimension deux on a $\alpha < 1$, même pour potentiels C^∞.

Estimées à énergie zero – Calderón

Theorème 6 (S. 2011)

Soient σ_1, σ_2 *deux conductivités isotropes telles que* $\Delta(\sigma_j^{1/2})/\sigma_j^{1/2}$ *satisfait l'hypothèse 2, où* D *est fixé et* $0 < \sigma_{\min} \leqslant \sigma_j \leqslant \sigma_{\max} < +\infty$ *pour* $j = 1, 2$ *pour quelques constantes* $\sigma_{\min}$ *et* $\sigma_{\max}$*. Soient* Λ_1, Λ_2 *les opérateurs Dirichlet-à-Neumann correspondant et* $\|\Delta(\sigma_j^{1/2})/\sigma_j^{1/2}\|_{m,1} \leqslant N$, $j = 1, 2$*, pour quelque* $N > 0$*. Supposons de plus que* $\operatorname{supp}(\sigma_j - 1) \subset D$ *pour* $j = 1, 2$*. Alors, quel que soit* $\alpha < m$ *il existe* $C = C(D, N, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}, m, \alpha)$ *telle que*

$$\|\sigma_2 - \sigma_1\|_{L^\infty(D)} \leqslant C(\log(3 + \|\Lambda_2 - \Lambda_1\|_*^{-1}))^{-\alpha}.$$

- Caractéristique principale de ces estimées : $\alpha \to +\infty$ lorsque $m \to +\infty$. Dans toutes les estimées précédents en dimension deux on a $\alpha < 1$, même pour potentiels C^∞.
- "Presque" optimalité par rapport au résultat de Mandache. Même stabilité que pour le problème linéarisé (approximation de Born).

Bibliographie

[1] R. G. Novikov, M. Santacesaria, *A global stability estimate for the Gel'fand–Calderón inverse problem in two dimensions*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **18**, 2010, no. 7, 765–785.

[2] M. Santacesaria, *Global stability for the multi-channel Gel'fand–Calderón inverse problem in two dimensions*, Bull. Sci. Math., 2012, doi :10.1016/j.bulsci.2012.02.004.

[3] R. G. Novikov, M. Santacesaria, *Global uniqueness and reconstruction for the multi-channel Gel'fand–Calderón inverse problem in two dimensions*, Bull. Sci. Math. **135**, 2011, no. 5, 421–434.

[4] R. G. Novikov, M. Santacesaria, *Monochromatic Reconstruction Algorithms for Two-dimensional Multi-channel Inverse Problems*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2012, doi :10.1093/imrn/rns025.

[5] M. Santacesaria, *New global stability estimates for the Calderón problem in two dimensions*, J. Inst. Math. Jussieu, 2012, doi :10.1017/S147474801200076X.

[6] M. Santacesaria, *Stability estimates for an inverse problem for the Schrödinger equation at negative energy in two dimensions*, Applicable Analysis, 2012, doi :10.1080/00036811.2012.698006.

[7] M. Santacesaria, *A Hölder-logarithmic stability estimate for an inverse problem in two dimensions*, preprint.