

# **Journées EDP Auvergne-Rhône-Alpes**

## **7 et 8 Novembre 2019**

Les Journées EDP Auvergne-Rhône-Alpes 2019 sont organisées par le LAMA sur le campus de Savoie Technolac de l'université Savoie Mont Blanc

Les exposés auront lieu dans l'amphithéâtre du bâtiment Pôle Montagne  
Les pauses-café seront servies en salle 110 du bâtiment Pôle Montagne

**Renseignements et inscriptions :** [gisclon@univ-savoie.fr](mailto:gisclon@univ-savoie.fr)

..

### **Jeudi 7 novembre 2019**

**10h30-11h15 :** Nicolas BESSET, IF, Grenoble

L'équation chargée de Klein-Gordon dans l'espace-temps extérieur de De Sitter-Reissner-Nordstrom

**11h30-12h15 :** Florian PATOUT, LAMA, Chambéry

Un modèle de génétique quantitative pour la reproduction sexuée. Analyse du modèle infinitésimal

**12h30-14h00 :** buffet

**14h00-14h45 :** Arnaud MUNCH, LMBP, Clermont-Ferrand

Approximation de solutions du système de Navier-Stokes par des méthodes moindres-carrés. Application au contrôle d'une EDP parabolique semi-linéaire

**15h-15h45 :** Laure SAINT RAYMOND, UMPA, ENS Lyon

Limite de champ moyen et équation de Lénard-Balescu

**16h-16h30 :** pause café

**16h30-17h15 :** Filippo SANTAMBROGIO, ICJ, Lyon,

Jeux à Champ Moyen : une introduction et des résultats récents

**17h30-18h15 :** Jean-Francois BOUGRON, IF, Grenoble

Systèmes quantiques en interactions répétées hors-équilibre

**19h30 :** repas au restaurant L'Atelier 59 rue de la République, Chambéry

...

**Vendredi 8 novembre 2019**

**9h00–9h45** : Dorin Bucur, LAMA, Chambéry

Maximisation des valeurs propres du Laplacien-Neumann

**9h45–10h30** : Emmanuelle CREPEAU, LJK, Grenoble

Stabilisation de l'équation de Korteweg-de Vries avec un terme de feedback retardé

**10h45–11h15** : pause café

**11h15–12h** : Simon SANTOSO, LJK, Grenoble

Méthode particulière pour l'étude des écoulements multiphasiques

**12h–12h45** : Tran Duc Minh PHAN, LMBP, Clermont-Ferrand

Modélisation et simulation numérique d'écoulements granulaires. Application aux écoulements pyroclastiques denses

**13h–14h30** : buffet

**14h30–15h15** : Rita JUODAGALVYTE, ICJ, Saint-Etienne

Time periodic Navier-Stokes equations in a thin tube structure motivated by hemodynamics

**15h15–16h00** : Raphael WINTER, UMPA, ENS Lyon

Convergence to the Landau equation from the truncated BBGKY hierarchy in the weak-coupling limit

## Résumés

— Nicolas BESSET, IF, Grenoble

L'équation chargée de Klein-Gordon dans l'espace-temps extérieur de De Sitter-Reissner-Nordström

L'équation chargée de Klein-Gordon dans l'espace-temps extérieur de De Sitter-Reissner-Nordström décrit une particule quantique relativiste massive, chargée et sans spin en interaction avec un trou noir sphérique, statique et chargé. L'équation est superradiante au sens où les énergies naturelles conservées associées aux solutions ne sont en général pas positives. Cela résulte du défaut de commutation entre le potentiel électrostatique et l'opérateur spatial libre.

Lorsque le produit des charges du champ de Klein-Gordon et du trou noir est faible devant la masse du champ, on peut décrire la solution en temps long sur tout compact par une expansion en terme des résonances du trou noir : il en résulte que l'énergie locale de la particule décroît exponentiellement vite en temps malgré la superradiance. Cette décroissance cesse d'être valable lorsque le produit des charges devient trop grand devant la masse de la particule. Dans ce cas, une résonance peut monter dans le plan complexe supérieur et un mode exponentiellement croissant apparaît. Cette résonance est la résonance 0 pour l'équation d'onde pour un produit des charges nul.

Enfin, en l'absence de modes, on peut construire une théorie de la diffusion pour l'équation considérée à l'aide d'une extension de Kaluza-Klein de l'espace-temps (qui consiste à quantifier l'interaction électrostatique sur un mode non nul). L'extension permet alors d'interpréter la complétude des opérateurs d'onde comme l'existence de traces aux horizons via un transport le long des géodésiques principales isotropes du nouvel espace-temps.

— Jean-Francois BOUGRON, IF, Grenoble

Systèmes quantiques en interactions répétées hors-équilibre

Les systèmes en interactions répétées sont (entre autre) un modèle mathématique de l'expérience du maser à un atome où un champ électromagnétique est traversé par un faisceau d'atomes. Si on découpe mentalement le faisceau en sous-ensembles d'atomes et qu'on suppose que chaque sous-ensemble est initialement à l'équilibre thermique à une température bien déterminée, on peut faire une analogie avec la situation d'un petit système quantique ouvert  $S$  connecté à des réservoirs thermiques  $R_1, R_2, \dots, R_m$  ayant chacun sa température  $T_1, T_2, \dots, T_m$ .

Ici  $S$  sera le champ électromagnétique et  $R_1, R_2, \dots, R_m$  forment une partition des atomes du faisceau.

On étudie ici le comportement en temps long des flux d'énergie dans les réservoirs ; on montre notamment des analogues de la formule de Green-Kubo et des relations de réciprocity d'Onsager, que l'on complète avec un principe de grandes déviations et un analogue de la relation de fluctuation d'Evans-Searles ; on souligne que ces théorèmes sont intrinsèquement reliés au caractère aléatoire du résultat d'une mesure prédit par la mécanique quantique.

Dans cet exposé, on présente rapidement le formalisme utilisé avant de préciser le modèle mathématique et d'expliquer les résultats obtenus. Ces derniers ont été montrés rigoureusement sur d'autres modèles de systèmes ouverts reliés à des réservoirs, que ce soit en mécanique statistique classique ou quantique ; on peut citer notamment la série de travaux de Vojkan Jaksic, Claude-Alain Pillet et al.

Les travaux présentés dans cet exposé font l'objet d'un premier article en cours de rédaction avec Laurent Bruneau. Par ailleurs, un travail en préparation avec Alain Joye et Claude-Alain Pillet généralise le modèle de ce premier article en introduisant des corrélations statistiques entre les réservoirs.

- Dorin Bucur, LAMA, Chambéry  
Maximisation des valeurs propres du Laplacien-Neumann

Je vais discuter la maximisation de la  $k$ -eme valeur propre du Laplacien-Neumann parmi tous les ouverts réguliers de volume fixé. Après une introduction dans le sujet et une discussion autour de l'existence de formes géométriques optimales pour ces fonctionnelles spectrales, je vais me concentrer sur les valeurs propres de rang petit. La première non triviale est maximisée par la boule, le résultat étant dû à Szegő et Weinberger dans les années 1950. Concernant la seconde valeur propre non triviale, Girouard, Nadirashvili et Polterovich ont démontré que le suprémum dans la famille d'ouverts simplement connexes de  $R^2$  est atteint par la réunion de deux disques identiques, disjoints. Je vais démontrer qu'un résultat semblable est vrai en toute dimension d'espace et sans aucune contrainte topologique. En particulier, ceci implique que la conjecture de Polya sur les valeurs propres du Laplacien-Neumann est vraie pour la seconde valeur propre sur des ouverts arbitraires. Ce résultat est obtenu avec A. Henrot

- Emmanuelle CREPEAU, LJK, Grenoble  
Stabilisation de l'équation de Korteweg-de Vries avec un terme de feedback retardé

Cet exposé aura comme objectif de montrer la stabilisation exponentielle de l'équation de Korteweg-de Vries sur un segment dans le cas où le terme de feedback est retardé. Deux preuves seront proposées, une constructive avec la mise en place d'une fonctionnelle de Lyapunov adaptée au système et l'obtention d'une estimation du taux de décroissance. L'autre basée sur la preuve d'une inégalité d'observabilité par l'absurde permettant d'obtenir un résultat optimal sur les longueurs de domaines possibles mais sans estimer le taux de décroissance.

- Rita JUODAGALVYTE, ICJ, Saint-Etienne,  
Time periodic Navier-Stokes equations in a thin tube structure motivated by hemodynamics

The time periodic Navier-Stokes equations are considered in the three- dimensional and two-dimensional settings with Dirichlet boundary conditions in thin tube structures. These structures are finite union of thin cylinders (in the case of dimension two thin rectangles), where the small parameter  $\varepsilon$  is the ratio of the height and the diameter of the cylinders. We consider the case of finite or big coefficient before the time derivative. This setting is motivated by hemodynamical applications. Theorems of existence and uniqueness of a solution are proved. Complete asymptotic expansion of a solution is constructed and justified by estimates of the difference of the exact solution and truncated series of the expansion in norms taking into account the first and second derivatives with respect to the space variables and the first derivative in time. The method of asymptotic partial decomposition of the domain is justified for the time periodic problem.

- Florian PATOUT, LAMA, Chambéry  
Un modèle de génétique quantitative pour la reproduction sexuée. Analyse du modèle infinitésimal

Nous étudions un modèle de génétique quantitative, avec un mode de reproduction sexuée. Un petit paramètre mesure la déviation entre le trait des descendants et la moyenne des traits des parents. Dans le régime où ce paramètre est petit nous étudions l'existence de solutions stationnaires, puis le problème de Cauchy lié à ce modèle. Les solutions se concentrent autour des optima de sélection, sous la forme de perturbations de distributions Gaussiennes avec petite variance fixée par le paramètre. Notre analyse généralise le cas linéaire de la reproduction asexuée en utilisant des outils d'analyse perturbative.

- Arnaud MUNCH, LMBP, Clermont-Ferrand  
 Approximation de solutions du système de Navier-Stokes par des méthodes moindres-carrés. Application au contrôle d'une EDP parabolique semi-linéaire  
 On introduit et analyse une méthode moindres-carrés espace-temps pour approcher les solutions de problèmes directs et de contrôlabilité associés à des EDPs paraboliques non linéaires.  
 Dans une première partie, on étudie le cas du système de Navier-Stokes incompressible en deux et trois dimensions d'espace. En utilisant une direction de descente particulière, on construit une suite d'éléments de  $L^2(0, T, V) \cap H^1(0, T; V')$  convergeant fortement vers une solution du système de Navier-Stokes. Après un nombre fini d'itérations (dépendant de la valeur du coefficient de viscosité), la convergence est quadratique. Dans une second partie, on étend la méthode à la contrôlabilité d'une équation de la chaleur semi-linéaire (uniformément contrôlable) et construisons une suite d'éléments de  $L^2(\Omega \times (0, T))$  convergeant fortement vers un contrôle à zero.  
 Dans les deux cas, il apparait que de telles suites convergentes (minimisantes pour la fonctionnelle moindre-carrés) sont reliées à celles obtenues par des méthodes de type Newton amortie employées pour résoudre les formulations faibles associées. Des expériences numériques en deux dimensions d'espace illustrent les résultats théoriques. Ces travaux sont en collaboration avec Jérôme Lemoine (Clermont-Ferrand) et Irène Marin-Gayte (Seville, Espagne).
  
- Tran Duc Minh PHAN, LMBP, Clermont-Ferrand,  
 Modélisation et simulation numérique d'écoulements granulaires. Application aux écoulements pyroclastiques denses  
 Les écoulements (ou coulées) pyroclastiques se produisant souvent lors d'éruptions volcaniques caractérisent un mélange à haute température de gaz volcaniques, de vapeur d'eau et de particules solides tels que des cendres ou des fragments de roches. De plus, ils se présentent sous la forme très compactée des matériaux et alors, peuvent être considérés comme un milieu granulaire dense. Ce type d'écoulements résulte souvent de l'effondrement d'un panache volcanique tandis que les écoulements pyroclastiques peuvent parcourir à grande vitesse sur de longues distances au voisinage du sol. Donc, la compréhension de leur mise en place est significativement importante pour évaluer des aléas volcaniques ainsi que pour prévoir des risques et minimiser des dommages dans les régions à forte activité volcanique.  
 L'objectif de ce travail est d'étudier leur modélisation grâce à un modèle mathématique pour des écoulements granulaires et de la faire simuler numériquement en comparant avec des expériences physiques. Nous sommes motivés par cette étude car dans la littérature leur modélisation n'est pas complète et même si leur rhéologie est encore mal comprise. Nous utilisons un modèle mathématique lié aux équations de Navier-Stokes incompressible avec une rhéologie visco-plastique où le tenseur des contraintes se constitue d'une partie visqueuse et d'une partie plastique. Chupin et Mathé (2017) ont analysé et montré qu'avec le seuil de plasticité défini en utilisant la pression lithostatique du milieu granulaire, ce modèle mathématique est bien posé. Cependant, par simulation numérique, nous montrons que la rhéologie Drucker-Prager dans laquelle le seuil de plasticité dépend de la pression du milieu granulaire permet d'obtenir des résultats numériques en accord avec des résultats expérimentaux physiques. Nous présentons dans cet exposé des simulations numériques des deux modèles différents de plasticité en comparant entre eux et chacun avec des essais physiques réalisés par Ionescu *et al* et par O. Roche du Laboratoire Magmas et Volcans (UCA).
  
- Laure SAINT RAYMOND, UMPA, ENS Lyon  
 Limite de champ moyen et équation de Lénard-Balescu  
 En régime de champ moyen, l'évolution d'un gaz de  $N$  particules en interaction est régie en première approximation par une équation de type Vlasov avec un champ de force

auto-induit. Cette équation est conservative, et ne décrit le retour à l'équilibre que dans un sens faible (Landau damping). Néanmoins, la première correction à cette approximation est donnée par l'opérateur de Lénard-Balescu, qui dissipe l'entropie en temps très long  $O(N)$ . On montrera dans cet exposé comment on peut obtenir rigoureusement cette correction (sur des temps  $O(N^\alpha)$  pour  $\alpha < 1$ ).

— Filippo SANTAMBROGIO, ICJ, Lyon

Jeux à Champ Moyen : une introduction et des résultats récents

Je présenterai d'abord les idées générales de la théorie des jeux à champ moyen, comme elle a été introduite il y a un peu plus d'une dizaine d'années par J.-M. Lasry et P.-L. Lions, en me concentrant en particulier sur le cas où les agents cherchent à éviter la congestion due à une densité trop élevée, ce qui se retrouve dans plusieurs modèles de trafic routier ou piétonnier. Sous certaines hypothèses sur la structure du coût, le jeu est un jeu à potentiel, où l'équilibre peut être trouvé en minimisant une énergie globale, typiquement convexe. Je présenterai brièvement des résultats de régularité permettant de justifier cette équivalence entre équilibres et optimiseurs tout en faisant également un aperçu de certains modèles qui diffèrent soit par la présence d'aléa, soit par la structure non-variationnelle.

— Simon SANTOSO, LJK, Grenoble,

Méthode particulière pour l'étude des écoulements multiphasiques.

Lors d'advection d'une fonction scalaire peu diffusive dans un écoulement turbulent, l'échelle de variation du scalaire est faible devant celle de la vitesse. L'étude du transport d'un scalaire paraît donc inadaptée sur un maillage monolithique. On présente donc ici une méthode multi-grille massivement parallèle où la vitesse est résolue sur un maillage volume finis et le transport par une méthode particulière semi-lagrangienne utilisant une grille plus fine que pour la vitesse et non soumise à une condition CFL. Une application de cette méthode sera l'étude de la diffusion différentielle dans le cas d'un jet turbulent.

— Raphael WINTER, UMPA, ENS Lyon,

Convergence to the Landau equation from the truncated BBGKY hierarchy in the weak-coupling limit

We show that in macroscopic times of order one, the solutions to the truncated BBGKY hierarchy (to second order) converge in the weak coupling limit to the solution of the nonlinear spatially homogeneous Landau equation. The truncated problem describes the formal leading order behavior of the underlying particle dynamics, and can be reformulated as a non-Markovian hyperbolic equation which converges to the Markovian evolution described by the parabolic Landau equation. The analysis in this paper is motivated by the derivation of Bogolyubov of the kinetic equation by means of a multiple time scale analysis of the BBGKY hierarchy.