

Calcul Différentiel — TD 4

Formules de Taylor

25 septembre 2007

Exercice 1 : Soient E, F, G des espaces normés, U un ouvert de E , V un ouvert de F , $f : V \rightarrow G$ et $g : E \rightarrow F$ deux fonctions telles que $g(U) \subset V$. On suppose que g est deux fois différentiable au point $a \in U$ et que f est deux fois différentiable au point $g(a)$. Exprimer $d^2(f \circ g)_a(h, k)$, pour $h \in E$ et $k \in E$, à l'aide des différentielles premières et secondes de f (resp. de g) en $g(a)$ (resp. en a).

Exercice 2 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (\cos x \cosh y, -\sin x \sinh y).$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et calculer $d^2 f_{(1,0)}((1, 0), (0, 1))$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^4 + y^2 + z^3, e^x \sin(yz)).$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et calculer $d^2 f_{(0,\pi,1)}((1, 2, 1), (0, 1, 0))$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 y^2 + z^4, y e^x).$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^3 et calculer $d^3 f_{(x,y,z)}((a, b, c)(\alpha, \beta, \gamma)(u, v, w))$.

Exercice 3 : On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire de la norme usuelle. On considère la fonction norme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que f n'est pas différentiable en 0.
2. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $df_x(u)$, $d^2 f_x(u, v)$ et $d^3 f_x(u, v, w)$.
3. les applications $\cos f(x)$ et $\sin f(x)$ sont-elles de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n ?

Exercice 4 : Soient E un espace normé et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur E telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in E$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\|d^2 f_x\| \leq M \forall x \in E$.

1. Montrer que si $h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$0 < f(x) + \lambda df_x(h) + \frac{\lambda^2}{2} M \|h\|^2.$$

Indication : appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f entre x et $x + \lambda h$.

2. En déduire que

$$\|df_x\| \leq \sqrt{2Mf(x)} \forall x \in E.$$

Exercice 5 : Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ une application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n (muni de la norme euclidienne usuelle). On dit que f est une *isométrie* si

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2.$$

On dit que f est une *isométrie infinitésimale* si

$$\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \|df_x(h)\| = \|h\|.$$

1. On suppose que f est une isométrie infinitésimale, et on note

$$a_{ijk} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Montrer que $a_{ijk} = a_{ikj} = -a_{kji}$. En déduire que $a_{ijk} = 0$ pour tous i, j et k .

2. Déduire de 1. que les deux définitions sont équivalentes.

3. *Application.* Soit le laplacien

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Montrer que $\Delta(u \circ f) = (\Delta u) \circ f$ pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 si et seulement si f est une isométrie de \mathbb{R}^n .

Exercice 6 : Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I , définissant un arc paramétré du plan. Soient t un point intérieur à I , p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que le vecteur $\vec{v} = \gamma^{(p)}(t)$ soit non nul, et q le plus petit entier supérieur à p tel que $\vec{w} = \gamma^{(q)}(t)$ ne soit pas colinéaire à \vec{v} . A l'aide de la formule de Taylor-Young, et en utilisant une base adaptée au problème, discuter suivant la parité de p et q l'aspect local de la courbe au voisinage de $\gamma(t)$.

Exercice 6 : Soit E un espace normé et U un ouvert convexe de E . On dit qu'une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, $\forall (a, b) \in U^2$ et $\forall t \in [0, 1]$,

$$g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + (1-t)g(b).$$

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U .

1. On suppose que f est convexe. Soient $(x, y) \in U^2$. On remarquera que l'on peut définir sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant 0 l'application $t \mapsto \Phi(t) = f(y + t(x - y))$. Montrer que $\Phi'(0) \leq f(x) - f(y)$ et en déduire que

$$f(x) - f(y) \geq df_y(x - y).$$

2. On suppose que f vérifie l'inégalité précédente pour tout couple $(x, y) \in U$. Montrer que f est convexe.

3. On suppose que f est \mathcal{C}^2 sur U .

(a) Montrer que si $d_x^2 f(h, h) \geq 0 \quad \forall x \in U, \quad \forall h \in E$, alors f est convexe. Indication : utiliser Taylor avec reste intégral.

(b) Réciproquement, on suppose que f est convexe. Montrer que $d_x^2 f(h, h) \geq 0 \quad \forall x \in U, \quad \forall h \in E$. Indication : raisonner par l'absurde et utiliser la formule de Taylor-Young.