Calcul Différentiel — TD 6
Extrema

Octobre 2007

Exercice 1 : Trouver les extrema de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

Exercice 2 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$.

1. Déterminer ses extrema relatifs.
2. f a-t-elle un maximum absolu et un minimum absolu sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer ses extrema relatifs.
2. f a-t-elle un maximum absolu et un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$?
3. Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Déterminer $M = \sup\limits_{(x,y)\in T} f(x, y)$ et $m = \inf\limits_{(x,y)\in T} f(x, y)$.

Exercice 4 : On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Trouver, parmis les parallélipipèdes rectangles de côtés parallèles aux axes, inscrits dans cet ellipsoïde, celui dont le volume est maximum.

Exercice 5 : Soit $(t, x) \mapsto F(t, x) = f_t(x)$ une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f_0 admet un minimum strict local en a, avec $f''(a) > 0$.

1. Montrer que pour tout t suffisamment petit, la fonction f_t admet un minimum local strict en un point $a(t)$ voisin de a, et donner un développement limité au premier ordre de la valeur de f_t en ce point.
2. . *Exemple*. Illustrer ce qui précède avec $f_t(x) = \frac{x^3}{3} - (1 + t)x$.

Exercice 6 : Soit D la droite dans le plan affine d'équation $x + y = 4$, et C le cercle unité.

1. Montrer que si $P \in C$ et $Q \in D$ sont tels que $||PQ||$ est égale la distance entre C et D, alors $(P, Q) \in \bar{D}(0, 5)^2$.
2. En cherchant les extrema d'une certaine fonction sur $D(0, 5)^2$ dans $\mathbb{R}$, trouver toutes les paires de points (P, Q) satisfaisant la condition précédente.

Exercice 7 : Trouver les extrema de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où $f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$, et où (x, y, z) est assujetti à appartenir au plan $x + y + z = 3a$, avec $a > 0$.

Exercice 8 : Trouver les triangles de périmètre donné dont l'aire est extrémale.

Exercice 9 : Soient a et b deux points sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Trouver les extrema de la fonction $||am|| + ||bm||$ lorsque m est assujetti à appartenir à la sphère.