Corrigé de Partiel de 24.10.18

Ex 1 : Notons :

1. Evenment A : " Le couteau est issu de la machine A" $P(A)=0.6$

Evenment B : " Le couteau est issu de la machine B" $P(B)=1-P(A)=0.4$

Evenment F : " Le couteau est defecteux"

Alors : $P(F|A)=0.06$ $P(F|B)=0.16$ Et :

$$P(F)= P(F|A)\cdot P(A)+P(F|B)\cdot P(B)=0.06\cdot 0.6+0.16\cdot 0.4=\boxed{0.1}$$

2. La probabilité à rechercher est $P(A|F)$:

" Etre issu de A sachant que le couteau est defecteux".

$$P(A|F)=\frac{P(F|A)\cdot P(A)}{P(F)}=\frac{0.06\cdot 0.6}{0.1}=\boxed{0.36}$$

Ex 2 :

1. X compte le nombre des "succès" (resultat pair) lors de la realisation de n experiences indepandants et identiques.

La probabilité des succès ~~est~~ etant $\frac{1}{2}$. Donc X suit une loi Binomiale $\boxed{B(n,\frac{1}{2})}$

de même Y compte le nombre des fois que l'on obtient un résultat inferieur ou égal à 3. (Probabilité de succès est $\frac{1}{2}$ aussi).

donc Y suit aussi la loi Binomiale $\boxed{B(n,\frac{1}{2})}$

2. $[X=0]\cap[Y=0]$ = "il n'y a aucun résultat pair et aucun résultat inferieur à 3" = "Le est toujours tombé sur 5".

Donc $P(X=0,Y=0)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$

Si X, Y sont indepandants on doit avoir en particulier

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0).$$

Or, $P(X=0)=P(Y=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $P(X=0)\cdot P(Y=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

et $\left(\frac{1}{4}\right)^n\neq\left(\frac{1}{6}\right)^n=P(X=0,Y=0)$

$\boxed{\text{Donc } X, Y \text{ ne sont pas independants}}$

Ex3: Notons

Evenment A : "il franchit la barre à la premiere tentative"
Evemant B : "il franchit la barre à la deuxiemé tentative"
Evenment S : "il franchit la barre à l'une de deux tentatives"

Alors $P(A) = \frac{2}{3}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

$$P(S) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = P(A) + P(A^c \cap B) = P(A \cup (A^c \cap B))$$

$A, (A^c \cap B)$ - Evennets disjoints

donc la probabilité demandée est : $\frac{P(A)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \boxed{\frac{4}{5}}$

Ex 4 : X est une variable dont les valeurs possibles sont 25, 30, 35

Sa loi est :
$$P(X=25) = \frac{3\cdot 25}{3\cdot 25 + 5\cdot 30 + 2\cdot 35} = \frac{15}{59} \simeq 0.254$$
$$P(X=30) = \frac{5\cdot 30}{3\cdot 25 + 5\cdot 30 + 2\cdot 35} = \frac{30}{59} \simeq 0.508$$
$$P(X=35) = \frac{2\cdot 35}{3\cdot 25 + 5\cdot 30 + 2\cdot 35} = \frac{14}{59} \simeq 0{,}237$$

L'esperance de X est.
$$E(X) = \frac{25\cdot 15}{59} + 30\cdot\frac{30}{59} + \frac{35\cdot 14}{59} = \frac{1756}{59} = \boxed{29.8}$$

Le nombre moyen d'élèves par classe est egal à
$$\frac{3\cdot 25 + 5\cdot 30 + 2\cdot 35}{10} = \frac{295}{10} = \boxed{29.5}$$

Il est different de E(X) car la loi du tirage au sort est differente.
Dans un cas on effectué un tirage au sort uniforme sur les élèves.
Dans l'autre cas c'est un tirage uniforme sur les classes.
Comme il y a plus de chances dans le premier cas de tirer au sort un élève dont la classe à plus grand nombre d'élèves il s'ensuit que l'esperence de X, E(X) est plus grand que la moyenne (et ils sont en particulier differents.

Ex 5:

1. X_1, X_2, X_3 étant des variables aléatoires independants dont la loi est celle de Bernoulli, on trouve que la loi de $X_1+X_2+X_3=Y$ est une loi binomiale. X_i étant de parametre $\frac{2}{3}$

la loi de $Y=X_1+X_2+X_3$ est $\boxed{B(3,\frac{2}{3})}$

2. Pour la loi Binomiale $\beta=B(N,p)$ on a $E(B)=N\cdot p$ $Var(B)=Np(1-p)$

or ici on a $Y=B(3,\frac{2}{3})$ donc $\boxed{E(Y)=3\cdot\frac{2}{3}=2}$

$\boxed{Var(Y)=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}}$

3. Les valeurs possibles de X_1-X_2 sont $-1, 0, 1$

la loi de X_1-X_2 est

-1	0	1
$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$

$X_1-X_2=1 \iff X_1=1\ X_2=0$

$X_1-X_2=-1 \iff X_1=0\ X_2=1$.

$X_1-X_2=0 \iff X_1=X_2=1$ ou $X_1=X_2=0$

donc les valeurs possibles de $(X_1-X_2)^2$ sont $0, 1$

la loi de $(X_1-X_2)^2$ est

0	1
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

c'est donc une $\boxed{\text{loi de Bernoulli}}$ de parametre $\frac{4}{9}$.

$\boxed{E((X_1-X_2)^2)=\frac{4}{9}}$ $\boxed{Var((X_1-X_2)^2)=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}=20}$

(Pour une loi de Bernoulli de parametre p, son éperance est p
Sa variance est $p(1-p)$