Contrôle Partiel du 6.03.2017
Durée 1 heure 30

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
On apportera un soin particulier à la présentation. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(t)}{1+t^2}\, dt$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}\, dt$

Exercice 2 On considère l'intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt$$

a) Montrer que $F(x)$ est définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

c) En déduire que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

d) Montrer que F vérifie l'équation différentielle $F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 3 Justifier l'existence et calculer le produit de convolution $f \star g$ des deux fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad , \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$