Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2016-2017
Printemps 2017

FICHE TD 2 - Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite quand $n \to \infty$ des intégrales suivantes :

$$(a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx, \quad (b)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^n + e^x}, \quad (c)\ \int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}\,dx, \quad (d)\ \int_0^\infty \frac{n\,\log(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\,dx,$$

$$(e)\ \int_{-\infty}^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

Exercice 2 Dérivation des intégrales à paramètres.

Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin(tx)}{1+t^4}\,dt.$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $y^{''''} + y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 3 Calcul d'une fonction définie par une intégrale.

Soit $f(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} e^{tx}\,dt.$

1. Montrer que f est définie sur $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire l'expression explicite de f. *On rappelle que* $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4 Étude de la fonction Γ d'Euler.

Soit $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$

1. Montrer que Γ est définie et continue sur $[a, b]$, pour tout $a, b > 0$. En déduire que Γ est définie et continue sur $]0; \infty[$.
2. Montrer que $\forall x \in]0; \infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\Gamma^{'}(x)$ et $\Gamma^{''}(x)$.