Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2017-2018
Printemps 2018

FICHE TD 2 - Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite quand $n \to \infty$ des intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{dx}{x^n + e^x}, \quad (c) \int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}\,dx, \quad (d) \int_0^\infty \frac{n\,\log(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\,dx,$$

$$(e) \int_{-\infty}^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

Exercice 2 Soit, $p > 0$, et

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Let but est de calculer $F(p)$ passant par sa dérivée.

1. Montrer que l'intégrale dans la définition de $F(p)$ est convergente pour tout $p > 0$.
2. Soit $p_0 > 0$. Montrer que $F'(p)$ existe pour $p \geq p_0$. En déduire que $F'(p)$ existe pour $p > 0$.
3. Vérifier par dérivation que $\frac{p\sin x + \cos x}{1+p^2}e^{-px}$ est une primitive de $-e^{-px}\sin x$ et calculer $F'(p)$.
4. En déduire que $F(p) = -\arctan p + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que
$$C = \lim_{p\to+\infty} F(p) + \arctan p = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 Dérivation des intégrales à paramètres.

Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin(tx)}{1+t^4}\,dt.$

1. Montrer que l'intégrale pour définir $f(x)$ est convergent pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la $k$ième dérivée $f^{(k)}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $f''''(x) + f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 4 Étude de la fonction Γ d'Euler.

Soit $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$

1. Montrer que Γ est définie et continue sur $[a,b]$, pour tout $a, b > 0$. En déduire que Γ est définie et continue sur $]0;\infty[$.
2. Montrer que $\forall x \in]0;\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer $\Gamma'(x)$ à l'aide d'un intégrale paramétrique.