

## FICHE TD 7 - Fonctions à une variable complexe I

**Exercice 1** En vérifiant que la limite  $\lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \neq z}} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$  existe, déterminer si les fonctions suivantes sont holomorphes ou non :

(a)  $f(z) = z^2$  sur  $\mathbb{C}$ , (b)  $f(z) = |z|^2$  sur  $\mathbb{C}$ , (c)  $f(z) = \frac{1}{z}$  sur  $\mathbb{C}^*$

**Exercice 2** Séries entières.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . Quelle est sa somme ?

(b) Développer la fonction  $\frac{1}{(1-z)^2}$  en série entière. Quel est son rayon de convergence ?

(c) Développer la fonction  $\log(1-z)$  en série entière. Ici  $\log$  est le logarithme principal et  $z-1 \notin \mathbb{R}^+$ . Quel est son rayon de convergence ?

(d) Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$  pour tout  $|z| < |a|$ .

Montrer que  $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$  pour tout  $|z| > |a|$ .

**Exercice 3** Intégrales lelong un chemin.

1. Donner un lacet  $\gamma$  qui trace un cercle de rayon  $R > 0$  autour de 0 dans le sens direct. Puis calculer l'intégrale de  $f(z) = \frac{1}{z}$  le long de  $\gamma$ ,  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ .
2. Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  le lacet  $\gamma(t) = 25 + 24e^{2\pi it^2}$ . Calculer l'intégrale  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ .
3. Soit  $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = \begin{cases} Re^{\pi it} & t \in [0, 1] \\ R(t-2) & t \in [1, 3] \end{cases}$ . Calculer les intégrales  $\int_{\gamma} \frac{1}{z-i} dz$  et  $\int_{\gamma} \frac{1}{z+i} dz$  pour  $0 < R < 1$  et  $1 < R$ .

**Exercice 4** Résidus des fonctions méromorphes. Déterminer les pôles et résidus des fonctions méromorphes suivantes :

(a)  $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^2 - 2z - 3}$ , (b)  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ , (c)  $f(z) = \tan(z)$ , (d)  $f(z) = \frac{z}{\sin(\pi z)}$ , (e)  $f(z) = \frac{\sin(z)}{(z-1)^2}$ .