Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2018-2019**
L2 - Informatique | UE : Statistiques pour l'Informatique

Feuille TD 3

Exercice 1. On regarde le jet de deux dés munis de la probabilité uniforme. Préciser l'espace de probabilité et déterminer la probabilité de l'événement de trouver les valeurs $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ou 12 comme somme de deux résultats.

Exercice 2. On jette une pièce munie de la probabilité uniforme n fois.

1. Quelle est la probabilité qu'on trouve exactement k fois pile ?
2. Quelle est la probabilité que la liste de résultats reste la même si l'on lit dans le sens reverse ?

Exercice 3. On a trois dés D_1, D_2, D_3 munis de probabilités uniformes, mais etiquetés de manière étrange. Les étiquettes de D_1 sont $2, 2, 4, 4, 9, 9$, de D_2 sont $1, 1, 6, 6, 8, 8$ et de D_3 sont $3, 3, 5, 5, 7, 7$. On définie p_{ij} comme probabilité que D_i donne un résultat plus grand que D_j.
Calculer p_{12}, p_{23} et p_{31}. Qu'est-ce qu'on peut dire de la choix optimale de dé dans un jeu entre deux joueurs qui choisissent un dé chacun ?

Exercice 4. On se pose la question si on peut piper deux dés (avec étiquettes $1, 2, 3, 4, 5, 6$ chacun) de manière que les sommes S possibles de 2 à 12 deviennent équiprobables.
Supposons donc que les probabilités de premier dé sont $p_1, p_2, \ldots, p_6$ et de deuxième dé $q_1, q_2, \ldots, q_6$ et que chaque valeur de la somme est équiprobable.

1. Trouver deux expressions pour $\mathbb{P}(S = 2)$, $\mathbb{P}(S = 12)$ et exprimer p_1 et p_6 en utilisant q_1 et q_6.
2. Montrer que $\frac{1}{11} = \mathbb{P}(S = 7) \geq p_1 q_6 + p_6 q_1$ et éliminer p_1 et p_6 de cette expression.
3. Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pour $a, b > 0$.
4. Conclure.

Exercice 5. Pour dépister une maladie, on applique un test sanguin. Si le patient est atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais le test est également positif pour 2% des personnes en bonne santé. La proportion de personnes malades dans la population soumise au test est de 10^{-3}. Calculer la probabilité pour qu'un patient soit en bonne santé sachant que le résultat de son test est positif.

Exercice 6. Alors qu'ils ne représentent que 13% de la population, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 30% des tués sur la route. À l'aide de ces données vérifier qu'un jeune a 2.87 fois plus de risque de mourir sur la route qu'un autre usager.

Exercice 7. Jet de deux pièces à Pile ou Face, avec probabilité uniforme.
On note A l'événement "les deux résultats sont identiques", B l'événement "la première pièce donne Pile" et C l'événement "la seconde pièce donne Face".
Montrer que les trois événements sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants.

Exercice 8. Deux événements A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$) et de probabilités non nulles, peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 9. Vous jouez à deux à la roulette russe avec un revolver doté d'un barillet tournant qui comporte six emplacements pour les balles. Chaque fois que l'on presse la détente, le barillet tourne d'un cran. Deux balles sont insérées côte à côte dans le barillet qui est ensuite positionné au hasard. Votre adversaire place le premier le canon du revolver contre sa tempe, presse la détente ... et reste en vie. Grand seigneur, il vous propose de faire tourner à nouveau le barillet au hasard avant de tirer à votre tour. Que décidez-vous ?

Exercice 10. Trois chasseurs tirent en même temps sur un éléphant lors d'un safari. La bête meurt atteinte par deux balles. On estime la valeur d'un chasseur par sa probabilité d'atteindre la cible en un coup. Ces probabilités sont respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$. Trouver pour chacun des chasseurs la probabilité d'avoir raté l'éléphant.

Exercice 11. Le candidat dans un jeu télévisé est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Il doit choisir une porte. À ce moment, le présentateur doit toujours ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par candidat, ni celle cachant la voiture. Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.
Faut-il prendre la porte initiale, la troisième porte, ou est-ce que ce choix est sans importance ?