Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2018-2019**

L2 - Informatique — UE : Statistiques pour l'Informatique

Feuille TD 4

Exercice 1. Calculer l'espérance et la variance de loi de Bernoulli de paramètre p.

Exercice 2. Calculer l'espérance et la variance de la loi binomiale de paramètres n, p

1. en utilisant la définition de la loi binomiale,
2. en utilisant la caractérisation comme somme de n variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes.

Exercice 3. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements : A : Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent. B : Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent.
2. Soit X la variable aléatoire : nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 4. (*) Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance. sa variance.

Exercice 5. Calculer l'espérance et la variance de la loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 6. Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?
3. Quelle est l'esperance de la variable trouvée ? Quelle est sa variance ?

Exercice 7. (*) Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Exercice 8. On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. S'il obtient 1, 2 ou 3, il gagne l'équivalent en euros (c'est-à-dire 1€ s'il obtient 1, par exemple). Sinon, il perd 2€. On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte).

1. Donnez la loi de X et sa fonction de répartition F_X.
2. Calculez l'espérance de X, puis sa variance.

On modifie le jeu de la façon suivante : les gains restent les mêmes pour les résultats 1, 2 ou 3, mais si le joueur obtient autre chose, il relance le dé. S'il obtient 3 ou moins, il gagne 3€, sinon il perd 5€.

1. Décrivez formellement l'univers du nouveau jeu.
2. Donnez la loi de Y (qui désigne de nouveau le gain du joueur) et calculez son espérance.
3. Quelle variante du jeu est la plus avantageuse pour le joueur ?

Exercice 9. (*) Si on ordonne les nombres $1, 2, \ldots, n$ au hasard (c.à.d. chaque ordre est choisi parmi tous les ordres avec probabilité uniforme), combien de nombres trouve-t-on à leurs positions correctes ?

Exercice 10. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$ un espace de probabilités tel que l'événement $\{i\}$ a la probabilité $\dfrac{2}{3^i}$.

1. Vérifier que les probabilités ont bien la somme 1.
2. Soient $X(\omega) = \omega$, $Y(\omega) = \frac{1}{\omega}$ et $Z(\omega) = \omega + \frac{1}{\omega}$.
   Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 11. (*) Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}(\frac{1}{N+1})$.

Exercice 12. Soient X et Y des variables indépendantes qui suivent des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p). Quelle est la loi de la somme $S = X + Y$?

Exercice 13. (*)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées respectivement suivant les lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et de paramètre $\mu > 0$. On note $S = X + Y$.
Déterminer la loi de S.