Corrigé du partiel Math IV Analyse du 6.11.2006

EXERCICE 1.

1. Soit $X = \{(\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < t < 2\pi\}$ et $Y = \{(\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq t \leq 2\pi\}$.
   (i) X ou Y sont-ils ouverts ? Justifier la réponse.
   (ii) X ou Y sont-ils compacts ? Justifier la réponse.
2. Donner la définition avec ϵ et δ pour la continuité d'une fonction $f : X \to E$ où (X, d) est un espace métrique et $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ n'est pas différentiable en 0. (On pourrait considérer une dérivée directionelle en 0.)

corrigé.

1. (i) Ni X ni Y sont ouverts. En faite si on prend le point $x = (\sin\pi, \cos\pi) = (0, -1) \in X$ alors pour tout $\epsilon > 0$, la boule $B(x, \epsilon)$ contient le point $(\frac{\epsilon}{2}, -1)$ qui n'est pas dans X (même argument pour Y).
   (ii) X n'est pas fermé, car la suite $(\sin\frac{1}{n}, \cos\frac{1}{n})$ converge vers $(0, 1) \notin X$. Donc X n'est pas compact. Y est compact car c'est l'image d'un intervalle compact par une application continue, notament $t \mapsto (\sin t, \cos t)$.
2. Pour tout $x \in X$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in X$ qui satisfait $d(x, y) < \delta$ on a $\|f(x), f(y)\| < \epsilon$.
3. Soit $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$. La dérivée directionelle de f vers v en x est $\frac{\partial f}{\partial v} = g'(0)$ où $g(t) = f(x + tv)$. En $x = 0$ on a donc $g(t) = \|tv\| = |t|\|v\|$, ce qui n'est pas dérivable en $t = 0$.

EXERCICE 2. Soit (X, d) un espace métrique et $a \in X$. Pour chaque $x \in X$ on définit la fonction $f_x : X \to \mathbb{R}$, $\quad f_x(t) = d(x, t) - d(a, t)$.

1. Montrer que $|d(x, x') - d(y, y')| \leq d(x, y) + d(x', y')$, pour tout $x, x', y, y' \in X$.
2. Montrer que f_x est continue.
3. Montrer que $|f_x(t)| \leq d(x, a)$.
4. Montrer que $\sup_{t \in X} |f_x(t) - f_y(t)| \leq d(x, y)$.
5. En déduire que l'application $\varphi : X \to B(X)$, $\varphi(x) = f_x$, est continue, où $B(X)$ est l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$, qui sont continues et bornées, muni de la norme $\|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)|$.

corrigé.

1. Supposons que $d(x, x') \geq d(y, y')$. Par l'inegalité triangulaire

   $$d(x, x') \leq d(x, y) + d(y, y') + d(y', x').$$

   Donc $|d(x, x') - d(y, y')| = d(x, x') - d(y, y') \leq d(x, y) + d(x', y')$. Si $d(x, x') \leq d(y, y')$ on echange les rôle de x, x' avec y, y'. En particulier $d(x, y) - d(x, y')| \leq d(y, y')$.

2. On a
$$\begin{aligned}|f_x(t)-f_x(t')| &= |d(x,t)-d(a,t)-(d(x,t')-d(a,t'))| \\ &\leq |d(x,t)-d(x,t')|+|d(a,t)-d(a,t'))| \leq 2d(t,t').\end{aligned}$$
Donc f est Lipschitz continue avec constant 2.
3. On utilise directement (1) : $|f_x(t)| = |d(x,t)-d(a,t)| \leq d(x,a)$.
4. $|f_x(t)-f_y(t)| = |d(x,t)-d(y,t)| \leq d(x,y)$. Donc le sup sur t est aussi majoré par $d(x,y)$.
5. φ est bien défini, en faite f_x est continue comme démontré dans (2) et borné comme démontré dans (3). (4) montre que $\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leq d(x,y)$ est donc φ est Lipschitz continue avec constant 1.

EXERCICE 3. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y,z) = (x+y^2, xy^2z),$$
et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$g(u,v) = (u^2+v, uv, e^v).$$
1. Montrer que f est différentiable en tout point $(x,z,y) \in \mathbb{R}^3$ et calculer sa matrice jacobienne.
2. Montrer que g est différentiable en tout point $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et calculer sa matrice jacobienne.
3. Calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$.

corrigé. Les fonctions f et g sont C^1 (fonctions polynomials et $(u,v) \mapsto e^v$ est C^1) donc elles sont différentiables. La matrice Jacobien de f en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est la matrice $J_f(x,y,z)$ qui a coefficient $J_f(x,y,z)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,y,z)$. En particulier,
1. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xy & xy^2 \end{pmatrix}.$$
2. D'une manière analogue, pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$
$$J_g(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}.$$
3. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, d'après la formule de différentiation des fonctions composées, $J_{g\circ f}(x,y,z) = J_g(f(x,y,z))J_f(x,y,z)$, donc
$$\begin{aligned} J_{g\circ f}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2(x+y^2) & 1 \\ xy^2z & x+y^2 \\ 0 & e^{xy^2z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xy & xy^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+y^2)+y^2z & 2y(2x+2y^2+xz) & xy^2 \\ y^2z(2x+y^2) & 2xyz(2y^2+x) & xy^2(x+y^2) \\ y^2ze^{xy^2z} & 2xyze^{xy^2z} & xy^2e^{xy^2z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$