Présentation du cours de géométrie complexe

cours d'École doctorale, automne 2008

Jean-Claude Sikorav, ENS Lyon

Le sujet du cours est l'étude des **variétés complexes**, qui sont définies comme les variétés différentiables à l'aide de cartes. On demande de plus que ces cartes : $\varphi_i : X \supset U_i \to V_i \subset \mathbb{C}^n$ aient pour images des ouverts de $\mathbb{C}^n$, et que les changements de cartes

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

sont des **biholomorphismes**, c'est-à-dire des applications de plusieurs variables complexes holomorphes ansi que leur inverse. Par définition, une application $f = \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ est holomorphe si elle l'est par rapport à chaque variable, ou de façon équivalente si elle est **analytique**, c'est-à-dire localement somme d'une série absolument convergente $\sum a_{i_1,\cdots,i_n}(z_1 - z_{0,1})^{i_1} \cdots (z_n - z_{0,n})^{i_n}$.

Les fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes possèdent la pupart des propriétés des fonctions d'une variable, la principale différence étant les propriétés de prolongement : par exemple, le **théorème de Hartogs** dit que toute fonction holomorphe définie au voisinage d'une sphère $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, s'étend holomorphiquement à la boule. En particulier (Riemann), toute fonction holomorphe définie au voisinage d'un point sauf en ce point s'étend. Plus généralement, cete propriétd́'extension vaut pour tout «objet holomorphe défini hors d'un ensemble de codimension complexe ≥ 2»/

Nous allons nous intéresser surtout aux variétés complexes compactes, dont les plus étudiées sont les **variétés algébriques projectives**. Ces variétés sont celles qui se réalisent comme sous-variété algébrique $X \subset \mathbb{CP}^n$, où $\mathbb{CP}^n$ est l'espace projectif complexe

$$\mathbb{CP}^n = \{\text{droites vectorielles de } \mathbb{C}^n\} = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*.$$

"Sous-variété algébrique" veut dire que l'image réciproque de X (augmentée de 0) dans $\mathbb{C}^{n+1}$ est un ensemble algébrique, lieu des zéros d'un ensemble de polynômes de $\mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$.

Le premier résultat remarquable est le **théorème de Chow** : toute sous-variété complexe compacte de $\mathbb{CP}^n$ est algébrique. Plus généralement, tout sous-ensemble **analytique** (= qui est localement le lieu des zéros d'un ensemble de fonctions holomorphes) compact est algébrique.

Le théorème de Chow est un cas particulier du théorème GAGA (Géométrie algébrique - Géométrie analytique) de J-P. Serre, qui dit en gros que sur une variété algébrique (projective ou non), tout "objet analytique (ou holomorphe) global" est algébrique. Par "objet analytique global", on entend par exemple :

- un sous-ensemble analytique compact
- un **fibré vectoriel holomorphe**
- un **faisceau cohérent**, qui est une sorte de combinaison de ces deux objets.

(Bien sûr, le sens de ces termes sera défini dans le cours).

Le résultat fondateur de cette histoire est dû à Riemann : toute variété complexe compacte de dimension un (= **courbe complexe compacte** = **surface de Riemann compacte**) est algébrique projective : elle se réalise dans $\mathbb{CP}^3$, ou dans $\mathbb{CP}^2$ si l'on admet des points doubles ordinaires. Ce résultat se voit aujourd'hui comme conséquence du **théorème de Riemann-Roch**, qui est le plus puissant moyen de prouver l'existence de sections holomorphes de fib$\mathbb{R}$'es en droites.

Un des buts principaux de ce cours (voire le but principal) est de démontrer une vaste généralisation de ce résultat de Riemann, qui constitue une caractérisation des sous-variétés algébriques projectives, le **théorème de plongement de Kodaira** : toute variété complexe compacte munie d'un fibré en droites holomorphe avec une métrique hermitienne à courbure strictement positive, est algébrique projective. L'hypothèse sur la courbure veut dire que si la norme d'une section holomorphe du fibré est donnée dans une carte par $h = e^{-\varphi}$, alors il existe des coordonnées locales holomorphes dans lesquelles φ est fortement convexe (on dit que φ est **strictement plurisous-harmonique (spsh)**).

Un corollaire de ce résultat est que si X est une variété complexe compacte équipée d'une **forme de Kähler**, c'est-à-dire une 2-forme fermée ω telle que $\omega(v, iw)$ est une métrique riemannienne, et si de plus $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ est une classe entière (= dans l'image de $H^2(M; \mathbb{Z})$), alors X est algébrique projective.

Si le temps le permet, on présentera d'autres résultats illustrant la «taille» de l'ensemble des variétés algébriques parmi les variétés complexes compactes :

• construction de C. Taubes de variétés complexes compactes à groupe fondamental arbitraire

• preuve par Kodaira que presque toutes les surfaces complexe compactes sont algébriques (ou se déforment en une surface algébrique)

• restrictions sur le groupe fondamental d'une variété algébrique ou kählérienne (théorie de Hodge, abélienne ou non [C. Simpson]), relations avec la conjecture de Shafarevich

• construction de C. Voisin de variétés kählériennes n'ayant pas le type d'homotopie de variétés algébriques.

Prérequis

• bases de géométrie différentielle : variétés, formes différentielles, fibrés vectoriels (un peu), métrique riemannienne (un peu de courbure), connexions, cohomologie de de Rham.

• analyse complexe à une variable (souhaitable : théorèmes d'uniformisation, de Runge, de Mittag-Leffler).

• analyse fonctionnelle hilbertienne : décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts.

Remarques

1) Les prérequis sont modulables en fonction de l'audience.

2) Malgré tout, ce cours est censé être plus avancé que celui de Jean-Pierre Demailly (M2 Grenoble, ENS Lyon chaque mercredi).

Bibliographie

Jean-Pierre Demailly, *Complex analytic and algebraic geometry*, livre "OpenContentBook", disponible sur la page de l'auteur : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/- demailly/books.html.

P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.

J. Bertin et al, *Introduction à la théorie de Hodge*, Soc Math France, 1996.

Claire Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Soc Math France, 2002.

R.O. Wells, *Differential geometry on complex manifolds*, Prentice-Hall 1973 puis Springer 1980 et 2008.

Horaires. Le cours commencera dans la semaine du 29 septembre. Je propose les horaires suivants (à l'ENS Lyon) :

lundi 10h15-12h15
lundi 15h45-17h45
mardi 10h15-12h15
jeudi 8h-10h
jeudi 15h45-17h45
vendredi 8h-10h
vendredi 13h30-15h45
vendredi 15h45-17h45.

Si aucun horaire ne convient, on peut explorer 18h-20h.