

**Nom et numéro de l'école doctorale :** ED MathIF, numéro 336  
**Nom et label de l'unité de recherche :** Institut Camille Jordan, UMR 5208  
**Localisation :** Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon-1  
**Nom du directeur de thèse :** Tuna Altinel  
**Courriel :** altinel@math.univ-lyon1.fr  
**Titre de la thèse :** La théorie des modèles et le groupe libre

**Connaissances et compétences requises :**

Connaissances générales au niveau M1 ; des connaissances plus solides en théorie générale des groupes sont préférables ; des connaissances en théorie des modèles équivalentes à celles acquises au cours d'introduction au niveau M2 sont préférables mais la maîtrise de la partie du cours en M1 approfondi sur la théorie des modèles sera suffisante. Des connaissances particulières sur le groupe libre et la combinatoire élémentaire des mots sont utiles mais pas immédiatement nécessaires.

**Les enjeux de la thèse :**

Ce projet propose d'étudier la théorie élémentaire du groupe libre à partir de trois sources qui contiennent les avancées les plus remarquables des dernières années : les travaux de Zlil Sela sur la théorie élémentaire du groupe libre ([2]), ceux de Mladen Bestvina et Mark Feighn sur les ensembles *négligeables* dans le groupe libre et un preprint récent de Anand Pillay ([1]) qui se basent sur les travaux susmentionnés pour étudier certaines propriétés modèle-théoriques de contenu géométrique du groupe libre.

Dans une suite d'articles d'importance fondamentale Sela a éclairci les propriétés modèle-théoriques des groupes libres non abéliens en montrant leurs équivalences élémentaires et l'élémentarité des plongements naturels qui existent entre les groupes libres. Il a ensuite démontré que la théorie élémentaire est stable, une notion centrale en théorie des modèles contemporaine. Ce qui est remarquable est qu'il a accompli ces avancées sans avoir recours aux modèles saturés du groupe libre pour lesquels la théorie géométrique qu'il utilise ne serait d'ailleurs pas suffisante pour la simple raison que les modèles saturés sont des groupes de type infini. Ces modèles restent toujours inconnus, et il est probable que le manque des connaissances soit l'une des sources de la complexité des travaux de Sela.

Dans ce contexte, les travaux de Bestvina et Feighn dans lesquels ces théoriciens des groupes ont trouvé une caractérisation combinatoire, à savoir *les ensembles définissables non négligeables*, d'une notion clé de la théorie des modèles des groupes stables qui est celle de *généricité*. Intuitivement, ce sont des ensembles larges dans un groupe stable dont un nombre fini de conjugués recouvrent le groupe ambiant. La notion de générique s'étend aux extensions élémentaires d'un groupe stable. Une question naturelle (Problem 4.5 de [1]) si une conclusion de ce genre est possible pour les ensembles non négligeables. Ce serait un pas vers une compréhension des extensions saturées du groupe libre.

D'autres questions motivées par la théorie des modèles des groupes stables sont mentionnées dans le preprint de Pillay dans lequel lui-même étudie une telle question. Ses difficultés techniques sont fortement liées au manque de compréhension des modèles saturés. Ce projet propose d'étudier certains problèmes ouverts mentionnés par Pillay et d'autres, dans le but d'approfondir de manière systématique les connaissances sur les modèles saturés du groupe libre. Un tel travail nécessite des connaissances à la fois en théorie géométrique des groupes et en théorie des modèles. En revanche, la formation qu'il fournira ouvrira une multitude de voies dans les deux disciplines qui sont parmi les plus actives des mathématiques contemporaines.

## Références

- [1] A. Pillay. Forking in the free group. [arXiv :math/0702134v1](https://arxiv.org/abs/math/0702134v1) [math.LO] 6Feb2007.
- [2] Z. Sela. Diophantine geometry over groups. [http ://www.ma.huji.ac.il/ zlil/](http://www.ma.huji.ac.il/~zlil/).