Proposition de sujet de thèse pour Elodie Pozzi

Isabelle Chalendar

Le thème de recherche de cette thèse se situe à l'intersection entre la théorie des fonctions et la théorie des opérateurs. Plus précisément un des objectifs centraux de la thèse consiste à étudier des classes d'opérateurs admettant un calcul fonctionnel (pas nécessairement continu) sur des algèbres de fonctions variées, dont les propriétés permettent en particulier de trouver des sous-espaces invariants pour les opérateurs considérés.

L'existence d'un calcul fonctionnel pour un opérateur donné T agissant sur un espace de Banach complexe et séparable X (c'est-à-dire la possibilité de définir un homomorphisme $f \longmapsto f(T)$ pour f appartenant à une algèbre de fonctions suffisamment grande afin d'étendre le calcul fonctionnel de Dunford–Riesz) est une question très naturelle en théorie des opérateurs. La construction de tels calculs a donné lieu à une très grande variété de résultats dans des directions multiples.
Par exemple, les idées développées par McIntosh [12] et Kalton-Weis [11] pour le calcul fonctionnel H^∞, ou encore par Berkson-Gillespie-Muhly [6] pour des opérateurs bien bornés, sont des outils très efficaces pour la résolution d'EDP [2] ainsi qu'en théorie ergodique [5].
L'axe de recherche qui sera priviligié dans un premier temps concerne le "Problème du Sous-espace Invariant" (PSI), problème majeur en théorie des opérateurs (voir par exemple [7]). Ce problème est le suivant :

Etant donné un espace de Banach complexe et séparable X et un opérateur linéaire et continu T agissant sur X, existe-t-il un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de X différent de X et $\{0\}$ tel que $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$?

Des exemples d'espaces de Banach et d'opérateurs sans sous-espace invariant non trivial ont été construits par P. Enflo et C. Read dans les années '80, et Read a construit de tels opérateurs sur des espaces de Banach classiques tels que ℓ_1 ou c_0. Le problème est cependant toujours ouvert sur un espace de Hilbert (ou même sur un espace réflexif).
Les questions concernant l'existence de sous-espaces invariants pour des classes particulières d'opérateurs ont donné lieu à un très grand nombre de théorèmes intéressants et d'exemples. Les calculs fonctionnels se sont avérés extrêmement utiles dans ce contexte. Par exemple, le fait bien connu que tout opérateur normal sur un espace de Hilbert a des sous-espaces hyperinvariants non triviaux (i.e. un sous-espace non seulement invariant pour l'opérateur, mais aussi pour tous les opérateurs qui commutent avec lui) provient du fait que tout opérateur normal admet un calcul fonctionnel défini pour les fonctions boréliennes sur son spectre. Cependant on ne sait pas si toute perturbation d'un opérateur normal par un opérateur compact admet un sous-espace invariant non trivial.
Un autre exemple où le calcul fonctionnel joue un rôle clé est un résultat de Wermer [13] qui établit que, pourvu que T soit un opérateur inversible dont le spectre contient au moins deux points et tel que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log \|T^n\|}{1+n^2} < +\infty$, alors T a un sous-espace invaraint non trivial. Le

cas où le spectre est réduit à un singleton est toujours un problème ouvert. L'obtention de sous-espaces invariants reposant sur l'existence de calculs fonctionnels est fortement liée à des estimations très fines de la résolvante (locale). Lorch, Godement, Wermer, Dunford, Lyubich-Matsaev, Schwartz, Colojoara–Foias, Apostol, Stampfli sont quelques-uns des mathématiciens qui ont apporté une contribution dans cette direction.

Récemment, I. Chalendar et J. Partington [9, 8] ont travaillé sur les opérateurs de type Bishop définis de la façon suivante : l'opérateur T_α associé à un irrationnel α de $[0,1]$ est l'opérateur sur $L^2[0,1]$, $f \mapsto [x \mapsto xf(\{x+\alpha\})]$ (ici $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x). Un résultat profond de Davie est que pourvu que α ne soit pas un nombre de Liouville, T_α a un sous-espace hyperinvariant non trivial La preuve repose sur l'utilisation astucieuse d'un calcul fonctionnel "faiblement continu" qui pourrait s'avérer très efficace dans bien d'autres situations.
Un des objectifs est de donner une description complète des sous-espaces invariants des opérateurs de type Bishop sur $L^p(0,1)$ associés avec un irrationnel α. Le cas où α est un nombre de Liouville est encore largement ouvert et d'autre part dans le cas où le calcul fonctionnel de Davie peut être utilisé, il serait fort intéressant de comprendre la richesse de la structure des sous-espaces invariants. En transposant le problème de $(0,1)$ sur le cercle unité, le calcul fonctionnel de Dynkin pourrait s'avérer très pertinent.
Les techniques developpées par E. Abakoumov, A. Atzmon et S. Grivaux dans [1], tout comme certaines techniques qui sont décrites dans plusieurs articles de C. Badea et S. Grivaux [3, 4], ou encore de M. Crouzeix [10] seront certainement aussi très utiles.

References

[1] E. Abakumov, A. Atzmon, and S. Grivaux. Cyclicity of bicyclic operators. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(7):447–452, 2007.

[2] P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh, and Ph. Tchamitchian. The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$. *Ann. of Math. (2)*, 156(2):633–654, 2002.

[3] C. Badea and S. Grivaux. Size of the peripheral point spectrum under power or resolvent growth conditions. *J. Funct. Anal.*, 246(2):302–329, 2007.

[4] C. Badea and S. Grivaux. Unimodular eigenvalues, uniformly distributed sequences and linear dynamics. *Adv. Math.*, 211(2):766–793, 2007.

[5] E. Berkson, J. Bourgain, and T. A. Gillespie. On the almost everywhere convergence of ergodic averages for power-bounded operators on L^p-subspaces. *Integral Equations Operator Theory*, 14(5):678–715, 1991.

[6] E. Berkson, T. A. Gillespie, and P. Muhly. Abstract spectral decompositions guaranteed by the Hilbert transform. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 53(3):489–517, 1986.

[7] I. Chalendar and J. Esterle. Le problme du sous-espace invariant. In *Development of mathematics 1950-2000*, pages 235–267. Birkha"user, Basel, 2000.

[8] I. Chalendar and J. R. Partington. The cyclic vectors and invariant subspaces of rational bishop operators. submitted, 2007.

[9] I. Chalendar and J. R. Partington. Invariant subspaces for product of bishop operators. submitted, 2007.

[10] Michel Crouzeix. Numerical range and functional calculus in Hilbert space. *J. Funct. Anal.*, 244(2):668–690, 2007.

[11] N. Kalton and L. Weis. The H^∞-calculus and sums of closed operators. *Math. Ann.*, 321(2):319–345, 2001.

[12] A. McIntosh. Operators which have an H_∞ functional calculus. In *Miniconference on operator theory and partial differential equations (North Ryde, 1986)*, volume 14 of *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, pages 210–231. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986.

[13] John Wermer. The existence of invariant subspaces. *Duke Math. J.*, 19:615–622, 1952.