

Cours de l'École Doctorale

## FIBRES VECTORIELS ET CLASSES CARACTERISTIQUES

*DEBUT DU COURS:* Le vendredi 12 février à 9h30, salle 125, Bât 101, 1er étage

1

Notion de fibré vectoriel, cocycles, faisceaux, cochaînes de Čech. Fibrés en droites réelles et complexes. Fibrés canoniques sur les projectifs, fibrés holomorphes sur les surfaces de Riemann: premières classes de Chern et de Stiefel-Whitney.

2

Opérations algébriques sur les fibrés vectoriels. Approche axiomatique de la cohomologie, des classifiants et des classes caractéristiques. Le théorème de Grothendieck: construction des classes de Chern à l'aide du fibré projectif associé.

3

Cohomologie des espaces projectifs et des grassmanniennes; application aux classes de Chern et de Pontryagin. Nombres caractéristiques.

4

Fibrés principaux, fibrés des repères, réduction du groupe structural, notion de  $G$ -structure, exemples.

5

Connexions sur les fibrés principaux, forme de courbure, holonomie. Connexions linéaires, courbure, torsion, dérivée covariante, transport parallèle. Connexions holomorphes et classes d'Atiyah.

6

Invariants d'un groupe de Lie et algèbre de Weil. La construction des classes caractéristiques par l'homomorphisme de Chern-Weil. La classe d'Euler et la formule de Gauss-Bonnet.

*NB: Suivant les goûts de l'auditoire et l'avancement du cours, on pourra développer ensuite l'un des trois points suivants.*

## 7

Fibrés plats, variétés plates, exemples. Construction de classes caractéristiques pour les fibrés plats, exemples, le théorème de van Est. Théorèmes de finitude pour les classes caractéristiques des fibrés plats, exemples et contre-exemples (Milnor, Wood, Deligne, Sullivan, Soulé, Reznikov). La caractéristique d'Euler des variétés plates.

## 8

Notions sur les classes caractéristiques des feuilletages, le théorème d'annulation de Bott. L'invariant de Godbillon-Vey, exemples, interprétations dynamiques. Introduction à la cohomologie de Gelfand-Fuks. le groupe de Virasoro et le cocycle de Thurston.

## 9

Les classes caractéristiques en physique:

a/ La première classe de Chern en physique: quantification géométrique, monopôle de Dirac, effet Bohr-Aharonov, supraconducteurs.

b/ L'espace des connexions sur un fibré principal et les théories de jauge. Equations de Yang et Mills, instantons, et seconde classe de Chern comme nombre d'instantons.

c/ Symétrie brisée et réduction du groupe structural, champ de Higgs(d'après E. Witten). Application à la théorie électrofaible.

d/Les classes de Cheeger-Simons et la fonctionnelle de Wess-Zumino-Witten.