

Explosion en temps fini de solutions peu oscillantes d'équations paraboliques sémi-linéaires

Sujet proposé par : **Lorenzo Brandolese et Dragoş Iftimie**

(brandolese@math.univ-lyon1.fr, dragos.iftimie@univ-lyon1.fr)

L'objet de la thèse sera l'étude du problème de Cauchy pour certaines équations paraboliques sémi-linéaires de la forme

$$\partial_t u - \Delta u = P(D)F(u), \quad (\text{PNL})$$

où $P(D)$ est un opérateur pseudodifférentiel et F une fonction nonlinéaire, et quelques-unes de ses variantes comme, par exemple, le système de Keller-Segel

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla \phi) \\ \tau \partial_t \phi = \Delta \phi + u \quad \tau \geq 0 \end{cases} \quad (\text{KS})$$

Les équations de type (PNL) décrivent de nombreux phénomènes physiques : en mécanique de fluides (équations de Navier–Stokes), en physique des plasmas (MHD) etc.

Le système (KS) est couramment utilisé en chimiotactisme, dans le but d'étudier le mouvement de colonies de certains microorganismes pouvant émettre une substance chimique, et qui sont attirés par une forte concentration de celle-ci.

Dans le cas limite $\tau = 0$, le système (KS) est utilisé aussi en astrophysique, comme modèle décrivant l'interaction gravitationnelle de particules, par exemple dans les nébuleuses.

Dans la plupart des cas, on ne peut (ou sait) garantir l'existence de solutions globales régulières que sous des hypothèses *de données initiales petites*.

La question cruciale est alors de trouver les conditions de petitesse optimales. Par ailleurs, des techniques puissantes issues de l'analyse harmonique (calcul paradifférentiel, analyses temps-fréquence...) ont récemment permis d'interpréter ces conditions non plus seulement en termes de *tailles des données*, mais aussi, et surtout, en termes de *leurs oscillations*.

Ainsi, pour les équations de Navier–Stokes, par exemple, (obtenues en choisissant une nonlinéarité $N(u)$ quadratique et un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1) on sait que des oscillations de type

$$A \sin(\omega \cdot x)$$

pour le champ de vitesse initial u_0 ne conduiront pas à un écoulement turbulent, tant que la fréquence ω de ces oscillations est grande ($|\omega| \gg A$).

Il s'agit là d'un critère d'existence globale que l'on peut exprimer, plus précisément, par une condition de la forme

$$\|u_0\|_{\text{BMO}^{-1}} < \varepsilon,$$

où BMO^{-1} est un espace fonctionnel assez classique en analyse harmonique.

En dehors du cas des équations de Navier–Stokes et ses variantes, pour lequel la condition ci-dessus peut être considérée comme optimale (du point de vue des techniques de semigroupe), pour de nombreux modèles de type (PNL), on ne dispose pas de critère d'existence globale aussi satisfaisants.

Le/la candidat(e) s'attachera à construire pour une vaste famille d'équations (PNL) physiquement pertinentes les espaces "maximaux", fournissant les conditions optimales d'existence globale. Ces résultats seront complétés par la constructions d'exemples de solutions explosant en temps fini, parce que trop lentement oscillantes.

Observons aussi qu'il n'y a pas de résultat connu sur l'explosion de solutions du modèle (KS) doublement parabolique (pour $\tau > 0$).

Certaines propriétés qualitatives des solutions, comme le comportement pour $t \rightarrow \infty$, ou le comportement asymptotique par rapport aux paramètres physiques du modèle (par exemple, $\tau \rightarrow 0$ dans le modèle doublement parabolique (KS)) feront également l'objet de l'étude.

Connaissances et compétences requises : analyse de Fourier, EDP.

Localisation : Institut Camille Jordan (ICJ) UMR CNRS 5208, Equipe "Equations aux dérivées partielles, analyse", Université Lyon 1, 21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex.

Ecole doctorale : ED MathIF Lyon, N. 336

Directeur et co-directeur de thèse : Lorenzo Brandolese (MCF, ICJ) et Dragoş Iftimie (PR, ICJ)

Contacts scientifiques : brandolese@math.univ-lyon1.fr (L. Brandolese) et dragos.iftimie@univ-lyon1.fr (D. Iftimie)