Étude explicite des conjectures de Stark

Sujet de thèse proposé par X.-F. Roblot (roblot@math.univ-lyon1.fr)
Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard - Lyon 1

Les conjectures de Stark portent sur les valeurs du terme dominant en $s = 0$ des fonctions L d'Artin de corps de nombres. Elles ont été développées dans une série d'articles fondateurs de Stark [1971, 1975, 1976, 1980]. Dès l'origine, les aspects explicites ont joué un rôle primordial dans ce domaine, avec plusieurs vérifications numériques effectuées par Stark [1976, 1977a,b, 1980] lui-même. L'article [Dummit, 2004] donne un survol récent des différents calculs numériques autour ces conjectures. C'est dans le cadre de cette étude explicite et algorithmique que s'inscrit cette proposition de sujet de thèse. Plus précisément, cette thèse se développera autour d'un ou plusieurs des thèmes décrits plus loin.

Pour commencer, fixons quelques notations (voir aussi l'ouvrage de référence [Tate, 1984]). Soit K/k une extension de corps de nombres. On suppose que K/k est galoisienne et on note G son groupe de Galois. A un caractère χ de G, on peut associer une fonction L d'Artin $L(s, \chi)$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ dès que χ ne contient pas le caractère trivial (sinon la fonction peut avoir un pôle en $s = 1$). Soit S un ensemble fini de places de k contenant les places infinies de k et les places finies de k ramifiées dans K/k. On pose $L_S(s, \chi)$ la fonction obtenue en supprimant dans $L(s, \chi)$ les facteurs eulériens correspondant aux places (finies) contenues dans S. On note $r(S, \chi)$ l'ordre d'annulation de la fonction $L_S(s, \chi)$ en $s = 0$, et pour $r \geq 0$, on note $C_r(S, \chi)$ le coefficient de s^r dans le développement de Taylor de $L_S(s, \chi)$ en $s = 0$. Ainsi, $C_r(S, \chi) = 0$ pour $0 \leq r < r(S, \chi)$ et

$$C_{r(S,\chi)}(S, \chi) \neq 0.$$

On dit que la situation est de rang r si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $r(S, \chi) \geq r$ pour tous les caractères irréductibles χ de G,
- il existe au moins un caractère irréductible χ de G tel que $r(S, \chi) = r$.*

Formules d'indice

Supposons que le groupe G est abélien et que S contient exactement une place totalement décomposée, alors la situation est de rang 1 et la conjecture de Stark abélienne de rang 1 prédit l'existence d'une unité ε de K telle que†

$$C_1(S, \chi) = -\frac{1}{w} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\varepsilon^\sigma|$$

pour tout caractère irréductible χ de G, avec w le nombre de racines de l'unité contenues dans K. L'unité ε, appelée unité de Stark, est en quelque sorte une généralisation des

*Et donc $C_r(S, \chi) \neq 0$ pour au moins un caractère irréductible χ de G.

†Cette unité vérifie conjecturalement aussi d'autres propriétés.

unités cyclotomiques et on peut se poser la question de l'existence pour les unités de Stark de formules d'indice similaires à celles existant pour les unités cyclotomiques. Un premier résultat dans ce sens a été établi par Rubin [1992], mais ce résultat est incomplet car il ne concerne que la p, χ-partie pour certains nombres premiers p et certains caractères χ. Ainsi, un premier projet de recherche sera de préciser cette formule dans un cas précis où la situation est bien contrôlée (décrit comme le cas "split" dans [Roblot, 2000]) et d'étudier ensuite, de manière algorithmique et théorique, comment généraliser à des cas moins bien connus. Une fois une formulation établie, il sera aussi intéressant d'étudier ce qu'elle nous apprend sur les propriétés des unités de Stark et ce qu'on peut en déduire sur leur existence.

Conjecture de Rubin et conjecture de Popescu

Si la situation du rang 1 est bien comprise avec une conjecture qui fait l'unanimité, la situation du rang $r \geq 2$ est beaucoup moins claire. Il existe une conjecture générale, aussi due à Stark, mais elle est beaucoup moins précise que son équivalent de rang 1 en ce qu'elle établit une égalité *mais seulement à un nombre rationnel près.* Cependant, deux formulations plus précises, l'une de Rubin et l'autre de Pospecu, existent. Ces conjectures, pour simplifier, affirment l'égalité entre un élément de $\mathbb{C}[G]$ construit à partir des valeurs de $C_r(S, \chi)$ et le régulateur d'un élément d'un sous-réseau du produit extérieur

$$\bigwedge\nolimits_{\mathbb{Q}[G]}^{r} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_S(K))$$

où $U_S(K)$ est le groupe des S-unités de K. Ces deux formulations, dites conjectures sur $\mathbb{Z}$, différent essentiellement par les propriétés supplémentaires imposées sur ce réseau. La conjecture de Rubin implique la conjecture de Popescu et dans certains les deux conjectures sont équivalentes. Cependant, il existe de nombreux cas où la conjecture de Rubin est beaucoup plus forte que la conjecture de Popescu (voir [Popescu, 2004] pour une comparaison des deux conjectures). Ce projet de recherche consiste à étudier ces cas afin de déterminer si les deux conjectures sont vérifiées, ou seulement celle de Popescu, voire aucune.

Conjecture de Brumer-Stark dans le cas non abélien

Dans le cas où l'extension K/k est abélienne, la conjecture correspondant au rang 0 s'appelle la conjecture de Brumer-Stark et sa formulation, due à Tate [1981], combine les idées de Stark avec une conjecture non publiée de Brumer. On construit à l'aide des valeurs $C_0(S, \chi) = L_S(0, \chi)$, un élément Θ_S, dit élément de Brumer-Stickelberger, par la formule suivante

$$\Theta_S = w \sum_{\chi \in \hat{G}} L_S(0, \chi)\, e_{\bar{\chi}}$$

où w est le nombre de racines de l'unité contenues dans K, $\hat{G}$ est le groupe des caractères de G et e_χ est l'idempotent associé à χ. Un résultat profond implique que cet élément est dans l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$ et la conjecture stipule que cet élément annule le groupe des classes de K, et de surcroît, que pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de K, on peut trouver un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{P}^{\Theta_S}$ satisfaisant des propriétés supplémentaires. Le projet de recherche consiste à trouver une généralisation de cette conjecture dans le cas où l'extension K/k est galoisienne, mais non abélienne. Un point de départ pourra être l'article de Hayes [2004] qui étudie les propriétés de l'élément de Brumer-Stickelberger dans le cas non abélien.

Références

[Dummit, 2004] D. Dummit. Computations related to Stark's conjecture. In *Stark's conjectures: recent work and new directions*, volume 358 de *Contemp. Math.*, pages 37–54. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[Hayes, 2004] D. Hayes. Stickelberger functions for non-abelian Galois extensions of global fields. In *Stark's conjectures: recent work and new directions*, volume 358 de *Contemp. Math.*, pages 193–206. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[Popescu, 2004] C. Popescu. Rubin's integral refinement of the abelian Stark conjecture. In *Stark's conjectures: recent work and new directions*, volume 358 de *Contemp. Math.*, pages 1–35. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[Roblot, 2000] X.-F. Roblot. Stark's conjectures and Hilbert's twelfth problem. *Experiment. Math.*, 9(2), 251–260, 2000.

[Rubin, 1992] K. Rubin. Stark units and Kolyvagin's "Euler systems". *J. Reine Angew. Math.*, 425, 141–154, 1992.

[Stark, 1971] H. Stark. Values of L-functions at $s = 1$. I. L-functions for quadratic forms. *Advances in Math.*, 7, 301–343 (1971), 1971.

[Stark, 1975] H. Stark. L-functions at $s = 1$. II. Artin L-functions with rational characters. *Advances in Math.*, 17(1), 60–92, 1975.

[Stark, 1976] H. Stark. L-functions at $s = 1$. III. Totally real fields and Hilbert's twelfth problem. *Advances in Math.*, 22(1), 64–84, 1976.

[Stark, 1977] H. Stark. Class fields for real quadratic fields and L-series at 1. In *Algebraic number fields: L-functions and Galois properties* (*Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975*), pages 355–375. Academic Press, London, 1977.

[Stark, 1977] H. Stark. Hilbert's twelfth problem and L-series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(5), 1072–1074, 1977.

[Stark, 1980] H. Stark. L-functions at $s = 1$. IV. First derivatives at $s = 0$. *Adv. in Math.*, 35(3), 197–235, 1980.

[Tate, 1981] J. Tate. Brumer-Stark-Stickelberger. In *Seminar on Number Theory, 1980–1981* (*Talence, 1980–1981*), pages 16, Exp. No. 24. Univ. Bordeaux I, Talence, 1981.

[Tate, 1984] J. Tate. *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$*, volume 47 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984. Notes par Dominique Bernardi et Norbert Schappacher.