

**Le nom et le numero de l'ecole doctorale** L'ecole doctorale de mathematiques et d'informatique fondamentale de Lyon (ED MathIF, numero 336)

**Le nom et label de l'unite de recherche** Unite de mathematiques pures et appliquees Ecole normale superieure de Lyon, CNRS UMR 5669

**La localisation** ENS de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

**Le nom du directeur de these** TSYGVINTSEV Alexei

**L'adresse courriel du contact scientifique** Alexei.Tsygvintsev@umpa.ens-lyon.fr

**Le titre de la these** Les théories de Morales-Ramis et de Ziglin : vers une application effective

## La description du projet

Un système Hamiltonien est dit intégrable s'il a suffisamment de lois de conservation i.e d'intégrales premières comme l'énergie, le moment cinétique, etc. Depuis cinquante ans, il existe une grande variété de résultats concernant les systèmes intégrables. En particulier, on observe qu'ils sont localement tous semblables dans le sens où le mouvement d'un tel système est (en dehors des singularités) un mouvement quasi périodique sur des tores. Par contre, les systèmes non-intégrables sont tous différents et la nature de leur non intégrabilité est spécifique dans chaque cas particulier. Comme le sujet de thèse nous proposons de développer des méthodes théoriques et pratiques (y compris numériques) des théories de l'intégrabilité complexe. Parmi les techniques, nous disposons du théorème de Morales et Ramis qui permet de montrer que certains systèmes Hamiltoniens ne sont pas intégrables en utilisant un groupe de Galois différentiel, ainsi que de l'approche de Ziglin basée sur le groupe de monodromie et des méthodes récentes de calcul formel pour l'étude des équations différentielles. Dans un premier volet, un des objectifs de thèse est de favoriser l'interaction entre ces méthodes et des applications en mécanique, physique et l'astrophysique. Dans un deuxième volet, le but de thèse sera d'améliorer l'utilisation pratique des théorèmes de Morales-Ramis et de Ziglin du point de vue effectif. L'application de ces théorèmes nécessite théoriquement le calcul (de la composante connexe) du groupe de Galois différentiel d'une équation différentielle linéaire d'ordre paire, à coefficients polynomiaux ou analytiques paramétrés, appelée équations aux variations (les paramètres représentent des données physiques du problème, par exemple des masses). Actuellement des algorithmes existent uniquement pour les équations d'ordre deux et trois. De plus, en général, la présence des paramètres rend l'utilisation de ces algorithmes très problématique. Mais la structure symplectique de l'équation aux variations et les contraintes sur les paramètres permettent d'appliquer le théorème plus facilement via les outils du calcul formel (logiciel Maple et Mathematica). Ces méthodes sont encore à être affinés afin d'approfondir une méthodologie systématique qui facilite la mise en œuvre pratique des critères d'intégrabilité.

Les méthodes développées dans la thèse peuvent être appliqués aux problèmes actuels suivants, qui sont proches à la Physique :

### Le Levitron

C'est un toupie lévitant dans un champ magnétique. Les paramètres sont la configuration du champ et des proportions géométriques du toupie ( la masse, le tensor d'inertie etc.) L'analyse de son groupe de Galois le long d'une solution particulière s'avère d'être difficile car le surface de Riemann des équations aux variations est de genre 3.

### Le Rattleback

Le problème nonholonome du rattleback (une toupie dynamiquement asymétrique) a suscité beaucoup d'intérêt ces derniers temps. Il est intéressant d'analyser le champ de vecteur associé dans

un voisinage complexe d'une solution particulière qui toujours existe qui correspond à une oscillation particulière du rattleback. L'équation aux variations correspondante est de dimension trois et possède quatre singularités régulières. Son groupe de monodromie (et le groupe de Galois donc) est un sous-groupe de  $SL(3, \mathbb{C})$  dont la structure dépend de plusieurs paramètres (la masse, le tenseur d'inertie etc). On obtient des conditions ouvertes qui garantissent l'absence des invariants polynomiaux (rationnels) de ce groupe. Par la suite on peut répondre aux divers questions liés à l'intégrabilité.

La question toujours ouverte est de classifier toutes les groupes de Galois qui apparaissent pour des valeurs différents des paramètres.

### **Les systèmes des pendules**

Le pendule multiple est le système avec contraintes, donnés par les équations polynomialles de degré deux. Le pendule simple et double sont scrupuleusement étudiés, quand le système avec plus des composants et le sujet d'analyse. La difficulté, rencontrée pendant les études du système multiple est la grande dimension de l'espace de configuration. C'est particulièrement interessant de trouver les conditions de l'intégrabilité, parce que le système multiple peut servir le modèle simple de molecule de polymer. Les paramètres du système peut être les masses des particules et les "longuers" des liaisons.

### **Dynamique spatiale**

Les vols spatiaux sont des applications directes de "testes" d'intégrabilité qu'on propose de développer. Le problème de la navigation des corps célestes artificielles peut être facilement ramenée à l'étude des champs de vecteurs des grands dimensions aux plusieurs (peut être milliers) paramètres. A jour présent, les seules méthodes d'analyse de ces modèles sont des calculs numériques lourds peu efficaces.

Pour souligner l'importance de ce problème il suffit de dire, qu'en 2007 le budget alloué à l'agence spatiale américaine en 2006 s'élevait à 16,623 milliards de dollars.

Un de taches privilégiés de thèse sera mis à jour des méthodes alternatives dans la dynamique spatiale basées sur les développements mathématiques plus récentes.

### **Les connaissances et competences requises**

Diplome niveau mastère ou equivalent (Bac+5)