Invariants de certains groupes d'origine dynamique

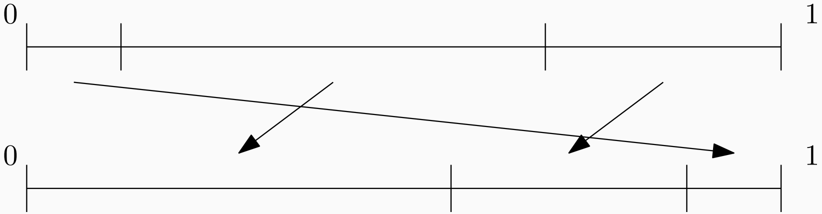
Octave Lacourte

June 8, 2021

Transformations de l'intervalle $[0, 1[$

Transformations de l'intervalle $[0, 1[$

Transformations de l'intervalle $[0, 1[$



Transformations de l'intervalle $[0, 1[$

L'ensemble de ces éléments est le groupe des échanges d'intervalles noté IET (Interval Exchange Transformations).

Transformations de l'intervalle $[0,1[$

L'ensemble de ces éléments est le groupe des échanges d'intervalles noté IET (Interval Exchange Transformations).

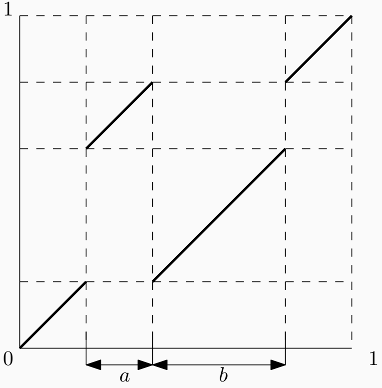
Si on autorise les renversements d'intervalles on obtient le groupes des échanges d'intervalles avec renversements noté $\mathrm{IET}^{\bowtie}$ constitué des bijections de $[0,1[$ qui sont isométriques par morceaux.

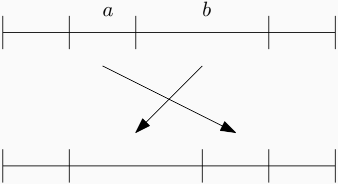
Rotations restreintes

Définition
Une **rotation restreinte** r de type (a, b) est un élément du groupe IET tel qu'il existe deux intervals consécutifs I et J de longueur respective a et b tels que r est la translation "$+b$" sur I et "$-a$" sur J.

Rotations restreintes

Définition
Une **rotation restreinte** r de type (a, b) est un élément du groupe IET tel qu'il existe deux intervals consécutifs I et J de longueur respective a et b tels que r est la translation "$+b$" sur I et "$-a$" sur J.





Une famille génératrice du groupe IET

Proposition
L'ensemble des rotations restreintes forme un système générateur du groupe IET*.*

Une famille génératrice du groupe IET

Proposition
L'ensemble des rotations restreintes forme un système générateur du groupe IET.

Définition
Soit $f \in \mathsf{IET}$ et $\mathcal{P}$ une partition finie en intervalles de $[0, 1[$. On dit que $\mathcal{P}$ **est associée à** f si f est continue sur chacun des intervalles de $\mathcal{P}$.

Une famille génératrice du groupe IET

Proposition
L'ensemble des rotations restreintes forme un système générateur du groupe IET.

Définition
Soit $f \in$ IET et $\mathcal{P}$ une partition finie en intervalles de $[0,1[$. On dit que $\mathcal{P}$ **est associée à** f si f est continue sur chacun des intervalles de $\mathcal{P}$.

Définition
Soit $\mathcal{P}$ une partition finie en intervalles de $[0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r_1, \dots, r_n$ des rotations restreintes. On dit que $(r_1, \dots, r_n)$ est une **suite de rotations restreintes associée à** $\mathcal{P}$ si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a r_i qui mélange deux intervalles de la partition $r_{i-1} \circ \ldots \circ r_1(\mathcal{P})$.

Une famille génératrice du groupe IET

Proposition
L'ensemble des rotations restreintes forme un système générateur du groupe IET.

Définition
Soit $f \in \mathrm{IET}$ et $\mathcal{P}$ une partition finie en intervalles de $[0,1[$. On dit que $\mathcal{P}$ **est associée à** f si f est continue sur chacun des intervalles de $\mathcal{P}$.

Définition
Soit $\mathcal{P}$ une partition finie en intervalles de $[0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r_1, \ldots, r_n$ des rotations restreintes. On dit que $(r_1, \ldots, r_n)$ est une **suite de rotations restreintes associée à** $\mathcal{P}$ si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a r_i qui mélange deux intervalles de la partition $r_{i-1} \circ \ldots \circ r_1(\mathcal{P})$.

Proposition
Soit $f \in \mathrm{IET}$ *et soit* $\mathcal{P}$ *une partition finie en intervalles de* $[0,1[$ *associée à* f*. Il existe une suite* $(r_1, \ldots, r_n)$ *de rotations restreintes associée à* $\mathcal{P}$ *telle que* $f = r_n \circ \ldots \circ r_1$.

Abélianisé du groupe IET

Théorème (Arnoux-Fathi,Sah)
Il existe un morphisme de groupes surjectif (explicite) φ *de* IET *vers la seconde puissance antisymétrique de* $\mathbb{R}$*, noté* $\Lambda^2_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$*, dont le noyau est le sous-groupe dérivé* $D(\mathrm{IET})$*.*

Abélianisé du groupe IET

Théorème (Arnoux-Fathi,Sah)
Il existe un morphisme de groupes surjectif (explicite) φ de IET *vers la seconde puissance antisymétrique de $\mathbb{R}$, noté $\Lambda^2_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, dont le noyau est le sous-groupe dérivé $D(\text{IET})$.*

$$\tilde{\varphi} = \begin{array}{ccc} \text{IET} & \longrightarrow & \bigotimes^2_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{[0,1[} 1 \otimes (f(x) - x)\, dx \end{array}$$

Abélianisé du groupe IET

Théorème (Arnoux-Fathi,Sah)
Il existe un morphisme de groupes surjectif (explicite) φ de IET *vers la seconde puissance antisymétrique de $\mathbb{R}$, noté $\Lambda^2_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, dont le noyau est le sous-groupe dérivé $D(\mathrm{IET})$.*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi} = & \mathrm{IET} & \longrightarrow & \bigotimes^2_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_{[0,1[} 1 \otimes (f(x) - x)\, dx \end{array}$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \otimes \lambda\left((f - id)^{-1}(\{\alpha\})\right)$$

Théorème (Arnoux-Fathi,Sah)
Il existe un morphisme de groupes surjectif (explicite) φ de IET *vers la seconde puissance antisymétrique de $\mathbb{R}$, noté $\Lambda^2_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, dont le noyau est le sous-groupe dérivé $D(\mathrm{IET})$.*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi} = & \mathrm{IET} & \longrightarrow & \bigotimes^2_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_{[0,1[} 1 \otimes (f(x) - x)\, dx \end{array}$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \otimes \lambda\left((f - id)^{-1}(\{\alpha\})\right)$$

En particulier si r est une rotation restreinte de type (a, b), ce morphisme vérifie $\tilde{\varphi}(r) = b \otimes a - a \otimes b$. En notant ρ la projection canonique $\bigotimes^2_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \Lambda^2_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ on a alors $\varphi(r) = \rho \circ \tilde{\varphi}(r) = 2b \wedge a$.

Le sous-groupe dérivé

Définition
Un élément t du groupe IET est une IET-**transposition** s'il existe deux sous-intervalles disjoints I et J de $[0,1[$ tels que t permute I et J et fixe le reste de $[0,1[$.

Le sous-groupe dérivé

Définition
Un élément t du groupe IET est une IET-**transposition** s'il existe deux sous-intervalles disjoints I et J de $[0,1[$ tels que t permute I et J et fixe le reste de $[0,1[$.

Proposition
Le sous-groupe dérivé $D(\mathrm{IET})$ *est simple et est engendré par l'ensemble des* IET-*transpositions.*

Le sous-groupe dérivé

Définition
Un élément t du groupe IET est une IET-**transposition** s'il existe deux sous-intervalles disjoints I et J de $[0,1[$ tels que t permute I et J et fixe le reste de $[0,1[$.

Proposition
Le sous-groupe dérivé $D(\mathrm{IET})$ *est simple et est engendré par l'ensemble des* IET-*transpositions.*

On peut voir facilement qu'une IET-transposition est un commutateur.

Une famille de sous-groupes

Une famille de sous-groupes

Soit Γ un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Z}$.

Une famille de sous-groupes

Soit Γ un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Z}$.

Définition
On définit $\mathrm{IET}(\Gamma)$ comme le sous-groupe de IET constitué des éléments qui sont continus en dehors de $\Gamma \cap [0, 1[$.

Le cas $\mathrm{IET}(\Gamma)$

Une Γ-**rotation restreinte** est une rotation restreinte de type (a, b) qui vit dans $\mathrm{IET}(\Gamma)$.

Le cas $\mathrm{IET}(\Gamma)$

Une Γ-**rotation restreinte** est une rotation restreinte de type (a, b) qui vit dans $\mathrm{IET}(\Gamma)$.

Proposition
L'ensemble des Γ-rotations restreintes forme un système générateur de $\mathrm{IET}(\Gamma)$.

Le cas $\mathsf{IET}(\Gamma)$

Théorème (L.)
Il existe un morphisme de groupes surjectif (explicite) ε_Γ *de* $\mathsf{IET}(\Gamma)$ *vers* ${}^{\ominus}\bigwedge_{\mathbb{Z}}^2 \Gamma$*, la seconde puissance antisymétrique de* Γ*, dont le noyau est le sous-groupe dérivé* $D(\mathsf{IET}(\Gamma))$*.*

Le cas IET(Γ)

Théorème (L.)
Il existe un morphisme de groupes surjectif (explicite) ε_Γ *de* IET(Γ) *vers* ${}^{\ominus}\bigwedge_{\mathbb{Z}}^2 \Gamma$*, la seconde puissance antisymétrique de* Γ*, dont le noyau est le sous-groupe dérivé* $D(\mathrm{IET}(\Gamma))$*.*

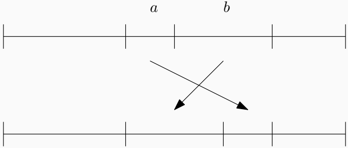
Avec ce théorème, si Γ est un groupe abélien libre de rang d on obtient que l'abélianisé du groupe IET(Γ) est naturellement isomorphe à $\mathbb{Z}^{\frac{d(d-1)}{2}} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$.

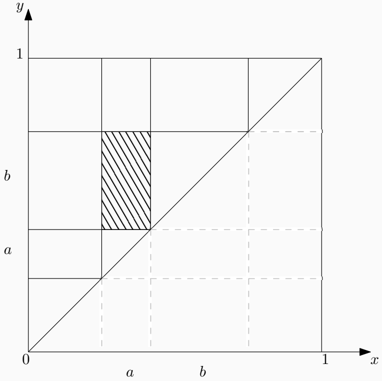
Le cas $\mathrm{IET}(\Gamma)$

Définition
Pour tout $f \in \mathrm{IET}(\Gamma)$, on appelle **inversion de** f une paire $(x, y) \in [0, 1[^2$ qui vérifie $x < y$ et $f(x) > f(y)$. On note $\mathrm{Inv}(f)$ l'ensemble des inversions de f.

Le cas IET(Γ)

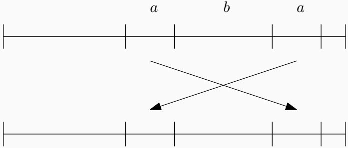
Définition
Pour tout $f \in \mathrm{IET}(\Gamma)$, on appelle **inversion de** f une paire $(x, y) \in [0, 1[^2$ qui vérifie $x < y$ et $f(x) > f(y)$. On note $\mathrm{Inv}(f)$ l'ensemble des inversions de f.

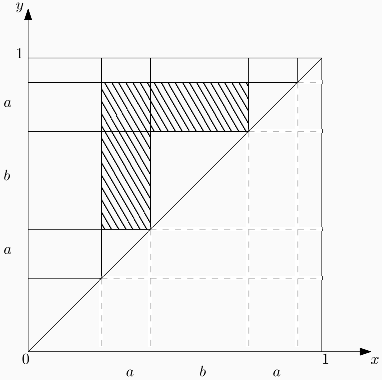




Le cas IET(Γ)

Définition
Pour tout $f \in \mathrm{IET}(\Gamma)$, on appelle **inversion de** f toutes les paires $(x, y) \in [0, 1[^2$ qui vérifient $x < y$ et $f(x) > f(y)$. On note $\mathrm{Inv}(f)$ l'ensemble des inversions de f.





Le cas IET(Γ)

On note A_Γ l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble des sous-intervalles de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont dans $\Gamma \cap [0,1]$. L'ensemble $\mathrm{Inv}(f)$ est un élément de l'algèbre de Boole produit tensoriel $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$.

Le cas IET(Γ)

On note A_Γ l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble des sous-intervalles de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont dans $\Gamma \cap [0,1]$. L'ensemble $\mathrm{Inv}(f)$ est un élément de l'algèbre de Boole produit tensoriel $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$.

En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ il existe une unique "mesure" ω_Γ sur $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$ dans $\bigotimes_{\mathbb{Z}}^2 \Gamma$ telle que pour tout $I, J \in A_\Gamma$ on a:

$$\omega_\Gamma(I \times J) = \lambda(I) \otimes \lambda(J).$$

Le cas IET(Γ)

On note A_Γ l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble des sous-intervalles de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont dans $\Gamma \cap [0,1]$. L'ensemble $\mathrm{Inv}(f)$ est un élément de l'algèbre de Boole produit tensoriel $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$.

En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ il existe une unique "mesure" ω_Γ sur $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$ dans $\bigotimes_{\mathbb{Z}}^2 \Gamma$ telle que pour tout $I, J \in A_\Gamma$ on a:

$$\omega_\Gamma(I \times J) = \lambda(I) \otimes \lambda(J).$$

La mesure ω_Γ est IET(Γ)-invariante.

Le cas IET(Γ)

On note A_Γ l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble des sous-intervalles de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont dans $\Gamma \cap [0,1]$. L'ensemble $\mathrm{Inv}(f)$ est un élément de l'algèbre de Boole produit tensoriel $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$.

En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ il existe une unique "mesure" ω_Γ sur $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$ dans $\bigotimes_{\mathbb{Z}}^2 \Gamma$ telle que pour tout $I, J \in A_\Gamma$ on a:

$$\omega_\Gamma(I \times J) = \lambda(I) \otimes \lambda(J).$$

La mesure ω_Γ est IET(Γ)-invariante.

Si r est une Γ-rotation restreinte de type (a, b) on a $\omega_\Gamma(\mathrm{Inv}(r)) = a \otimes b$.

Le cas IET(Γ)

On note A_Γ l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble des sous-intervalles de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont dans $\Gamma \cap [0,1]$. L'ensemble $\mathrm{Inv}(f)$ est un élément de l'algèbre de Boole produit tensoriel $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$.

En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ il existe une unique "mesure" ω_Γ sur $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$ dans $\bigotimes_{\mathbb{Z}}^2 \Gamma$ telle que pour tout $I, J \in A_\Gamma$ on a:

$$\omega_\Gamma(I \times J) = \lambda(I) \otimes \lambda(J).$$

La mesure ω_Γ est IET(Γ)-invariante.

Si r est une Γ-rotation restreinte de type (a,b) on a $\omega_\Gamma(\mathrm{Inv}(r)) = a \otimes b$.

On note p la projection de $\bigotimes_{\mathbb{Z}}^2 \Gamma$ sur ${}^{\ominus}\bigwedge_{\mathbb{Z}}^2 \Gamma$ et on note $\varepsilon_\Gamma = p \circ \omega_\Gamma$.

Le cas IET(Γ)

On note A_Γ l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble des sous-intervalles de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont dans $\Gamma \cap [0,1]$. L'ensemble $\mathrm{Inv}(f)$ est un élément de l'algèbre de Boole produit tensoriel $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$.

En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ il existe une unique "mesure" ω_Γ sur $A_\Gamma \otimes A_\Gamma$ dans $\bigotimes^2_{\mathbb{Z}} \Gamma$ telle que pour tout $I, J \in A_\Gamma$ on a:

$$\omega_\Gamma(I \times J) = \lambda(I) \otimes \lambda(J).$$

La mesure ω_Γ est IET(Γ)-invariante.

Si r est une Γ-rotation restreinte de type (a, b) on a $\omega_\Gamma(\mathrm{Inv}(r)) = a \otimes b$.

On note p la projection de $\bigotimes^2_{\mathbb{Z}} \Gamma$ sur ${}^{\ominus}\bigwedge^2_{\mathbb{Z}} \Gamma$ et on note $\varepsilon_\Gamma = p \circ \omega_\Gamma$.

Théorème
L'application ε_Γ est un morphisme de groupes surjectif de IET(Γ) *sur* ${}^{\ominus}\bigwedge^2_{\mathbb{Z}} \Gamma$.

Le cas IET(Γ)

Toute IET-tranposition qui vit dans IET(Γ) est appelée une Γ-**transposition**.

Le cas IET(Γ)

Toute IET-tranposition qui vit dans IET(Γ) est appelée une Γ-**transposition**.

Pour tout element $f \in \mathrm{Ker}(\varepsilon_\Gamma)$, il existe t une Γ-transposition et $h \in D(\mathrm{IET}(\Gamma))$ tels que $f = th$.

Le cas IET(Γ)

Toute IET-tranposition qui vit dans IET(Γ) est appelée une **Γ-transposition**.

Pour tout element $f \in \mathrm{Ker}(\varepsilon_\Gamma)$, il existe t une Γ-transposition et $h \in D(\mathrm{IET}(\Gamma))$ tels que $f = th$.

On a l'équivalence :

$$a \wedge a = 0 \Leftrightarrow a \in 2\Gamma.$$

Toute Γ-transposition t qui permute deux intervalles de longueur $a \in \Gamma$ qui est dans $\mathrm{Ker}(\varepsilon_\Gamma)$ est dans $D(\mathrm{IET}(\Gamma))$.

Le cas $\mathrm{IET}(\Gamma)$

Toute IET-tranposition qui vit dans $\mathrm{IET}(\Gamma)$ est appelée une **Γ-transposition**.

Pour tout element $f \in \mathrm{Ker}(\varepsilon_\Gamma)$, il existe t une Γ-transposition et $h \in D(\mathrm{IET}(\Gamma))$ tels que $f = th$.

On a l'équivalence :

$$a \wedge a = 0 \Leftrightarrow a \in 2\Gamma.$$

Toute Γ-transposition t qui permute deux intervalles de longueur $a \in \Gamma$ qui est dans $\mathrm{Ker}(\varepsilon_\Gamma)$ est dans $D(\mathrm{IET}(\Gamma))$.

Proposition
On a l'égalité :

$$\mathrm{Ker}(\varepsilon_\Gamma) = D(\mathrm{IET}(\Gamma)).$$

Le cas $\mathrm{IET}^{\bowtie}(\Gamma)$

Le cas $\mathrm{IET}^{\bowtie}(\Gamma)$

Les renversements d'intervalles dont les bornes sont dans $\Gamma \cap [0, 1]$ engendrent $\mathrm{IET}^{\bowtie}(\Gamma)$.

Le cas $\mathrm{IET}^{\bowtie}(\Gamma)$

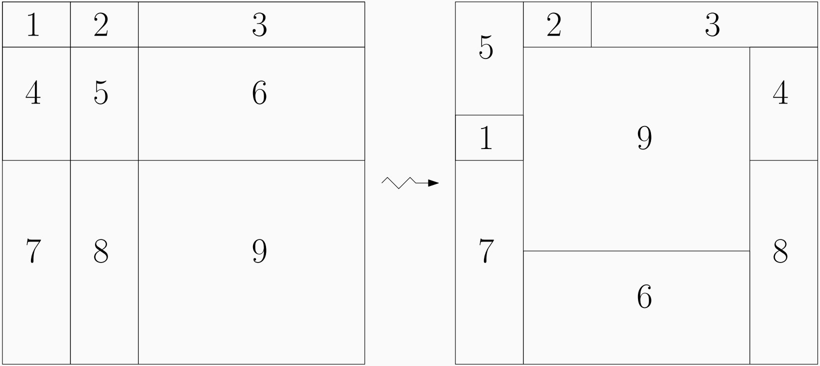
Les renversements d'intervalles dont les bornes sont dans $\Gamma \cap [0,1]$ engendrent $\mathrm{IET}^{\bowtie}(\Gamma)$.

Théorème
L'abélianisé $\mathrm{IET}^{\bowtie}(\Gamma)_{\mathrm{ab}}$ *est naturellement isomorphe au groupe :*

$$\langle \{ a \otimes a \ [\mathrm{mod}\ 2] \mid a \in \Gamma \} \rangle \times \langle \{ \ell \wedge \ell \ [\mathrm{mod}\ 2] \mid \ell \in \Gamma \} \rangle,$$

où le terme de gauche du produit appartient à $\bigotimes_{\mathbb{Z}}^{2} \Gamma / (2 \bigotimes_{\mathbb{Z}}^{2} \Gamma)$ *et le terme de droite à* ${}^{\ominus}\bigwedge_{\mathbb{Z}}^{2} \Gamma / (2 {}^{\ominus}\bigwedge_{\mathbb{Z}}^{2} \Gamma)$*.*

Des échanges de rectangles



Pour tout $d \geq 1$, on définit le groupe Rec_d des échanges de rectangles en dimension d, comme le groupe des permutations f de $[0,1[^d$ telles qu'il existe une partition finie en rectangle de $[0,1[^d$ telle que f est une translation sur chacun des rectangles de cette partition.

Des échanges de rectangles

Pour tout $d \geq 1$, on définit le groupe Rec_d des échanges de rectangles en dimension d, comme le groupe des permutations f de $[0,1[^d$ telles qu'il existe une partition finie en rectangle de $[0,1[^d$ telle que f est une translation sur chacun des rectangles de cette partition.

Des échanges de rectangles

Pour tout $d \geq 1$, on définit le groupe Rec_d des échanges de rectangles en dimension d, comme le groupe des permutations f de $[0,1[^d$ telles qu'il existe une partition finie en rectangle de $[0,1[^d$ telle que f est une translation sur chacun des rectangles de cette partition.

Une telle partition est dite associée à f.

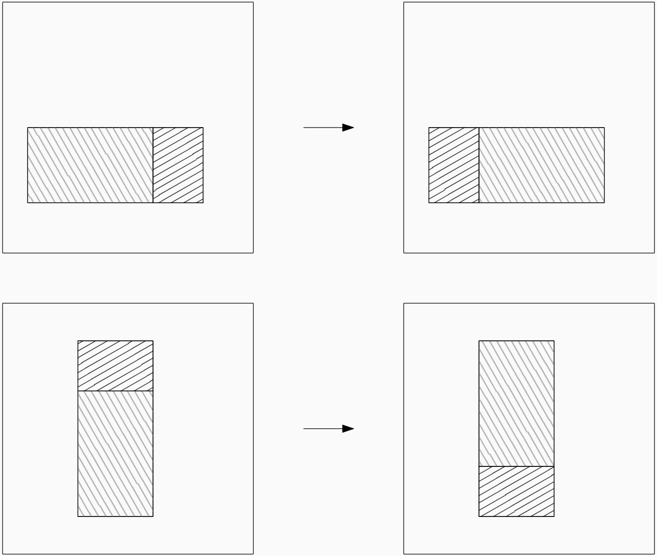
Des échanges de rectangles

Pour tout $d \geq 1$, on définit le groupe Rec_d des échanges de rectangles en dimension d, comme le groupe des permutations f de $[0,1[^d$ telles qu'il existe une partition finie en rectangle de $[0,1[^d$ telle que f est une translation sur chacun des rectangles de cette partition.

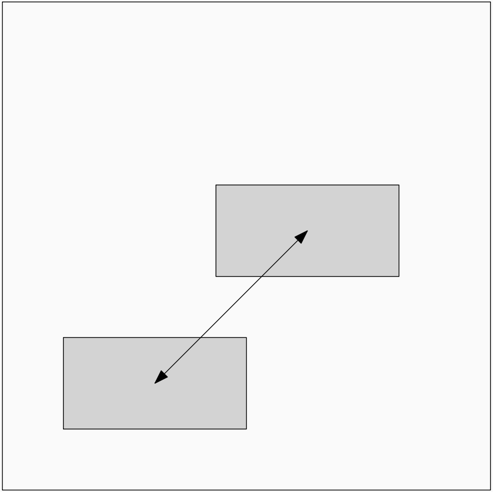
Une telle partition est dite associée à f.

Dans la suite on illustre principalement le cas $d = 2$.

Battages restreints



Transpositions de rectangles



Des résultats d'engendrement

Théorème
L'ensemble des battages restreints forment un système générateur de Rec_d.

Des résultats d'engendrement

Théorème
L'ensemble des battages restreints forment un système générateur de Rec_d.

Définition
Soit $\mathcal{P}$ une partition finie de $[0,1[^d$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r_1, \ldots, r_n$ des battages restreints. On dit que $(r_1, \ldots, r_n)$ est une **suite de battages restreints associée à** $\mathcal{P}$ si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ le battage restreint r_i mélange deux rectangles de la partition $r_{i-1} \circ \ldots \circ r_1(\mathcal{P})$.

Des résultats d'engendrement

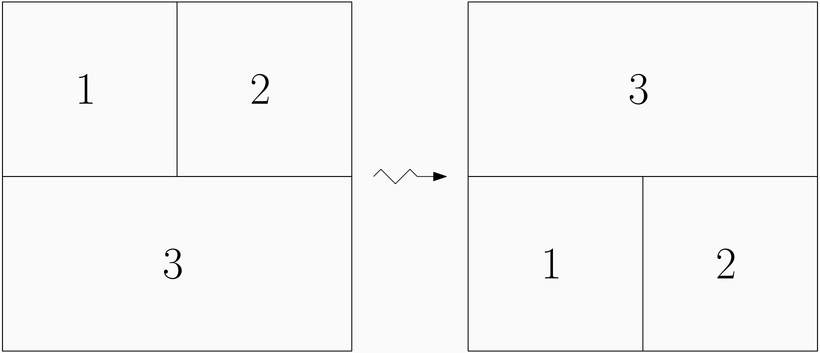
Théorème
L'ensemble des battages restreints forment un système générateur de Rec_d.

Définition
Soit $\mathcal{P}$ une partition finie de $[0,1[^d$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r_1, \ldots, r_n$ des battages restreints. On dit que $(r_1, \ldots, r_n)$ est une **suite de battages restreints associée à** $\mathcal{P}$ si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ le battage restreint r_i mélange deux rectangles de la partition $r_{i-1} \circ \ldots \circ r_1(\mathcal{P})$.

Conjecture Naïve
Pour tout $f \in \mathrm{Rec}_d$ *et pour toute partition* $\mathcal{P}$ *associée à* f*, il existe une suite de battages restreints* $(r_1, \ldots, r_n)$ *de* $\mathcal{P}$ *telle que* $f = r_n \circ \ldots \circ r_1$.

Un contre-exemple

Un contre-exemple



Partition $\mathbb{Q}$-libre

Définition
On dit qu'une partition $\mathcal{P}$ est **ensemblistement $\mathbb{Q}$-libre** ($\mathbb{Q}$-libre dans la suite) si pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, l'ensemble $\{\lambda(\mathrm{pr}_i(K)) \mid K \in \mathcal{P}\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.

Partition $\mathbb{Q}$-libre

Définition
On dit qu'une partition $\mathcal{P}$ est **ensemblistement $\mathbb{Q}$-libre** ($\mathbb{Q}$-libre dans la suite) si pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, l'ensemble $\{\lambda(\mathrm{pr}_i(K)) \mid K \in \mathcal{P}\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.

Proposition
Toute partition de $[0, 1[^d$ peut se raffiner en une partition $\mathbb{Q}$-libre.

Partition $\mathbb{Q}$-libre

Définition
On dit qu'une partition $\mathcal{P}$ est **ensemblistement $\mathbb{Q}$-libre** ($\mathbb{Q}$-libre dans la suite) si pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, l'ensemble $\{\lambda(\mathrm{pr}_i(K)) \mid K \in \mathcal{P}\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.

Proposition
Toute partition de $[0, 1[^d$ peut se raffiner en une partition $\mathbb{Q}$-libre.

Théorème
Pour tout $f \in \mathrm{Rec}_2$ et pour toute partition $\mathcal{P}$ $\mathbb{Q}$-libre associée à f, il existe une suite de battages restreints $(r_1, \ldots, r_n)$ de $\mathcal{P}$ telle que $f = r_n \circ \ldots \circ r_1$.

Lien avec les quadrillages

Proposition
Soit $f \in \mathrm{Rec}_d$ *et soit* $\mathcal{Q}$ *une partition* $\mathbb{Q}$*-libre associée à* f *qui est un quadrillage telle que* $f(\mathcal{Q})$ *est un quadrillage. Alors il existe une suite de battages restreints* $(r_1, \ldots, r_n)$ *de* $\mathcal{Q}$ *telle que* $f = r_n \circ \ldots \circ r_1$*.*

Lien avec les quadrillages

Proposition
Soit $f \in \mathrm{Rec}_d$ et soit $\mathcal{Q}$ une partition $\mathbb{Q}$-libre associée à f qui est un quadrillage telle que $f(\mathcal{Q})$ est un quadrillage. Alors il existe une suite de battages restreints $(r_1, \dots, r_n)$ de $\mathcal{Q}$ telle que $f = r_n \circ \dots \circ r_1$.

Théorème
Pour toute partition $\mathbb{Q}$-libre $\mathcal{P}$ de $[0,1[^2$, il existe une suite de battages restreints $(r_1, \dots, r_n)$ de $\mathcal{P}$ telle que $r_n \circ \dots \circ r_1(\mathcal{P})$ est un quadrillage.

Un cas particulier

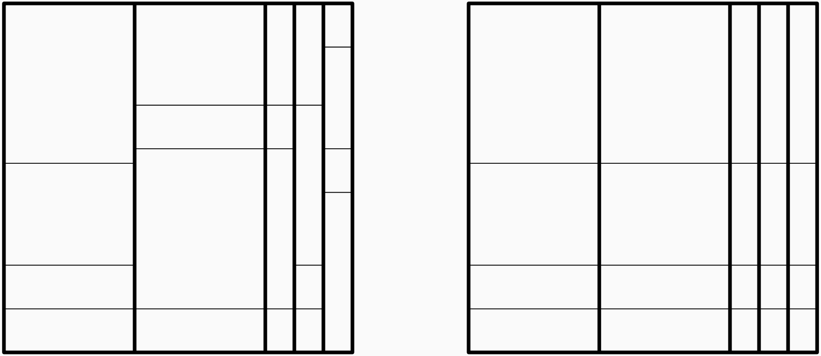
Proposition

Le théorème est vrai pour toute partition $\mathbb{Q}$-libre $\mathcal{P}$ de $[0,1[^2$ telle qu'il existe une partition $\mathcal{Q}$ de $[0,1[$ telle que pour toute pièce $K \in \mathcal{P}$ on a $\mathrm{pr}_1(K) \in \mathcal{Q}$.

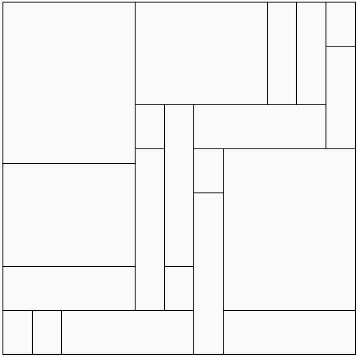
Un cas particulier

Proposition

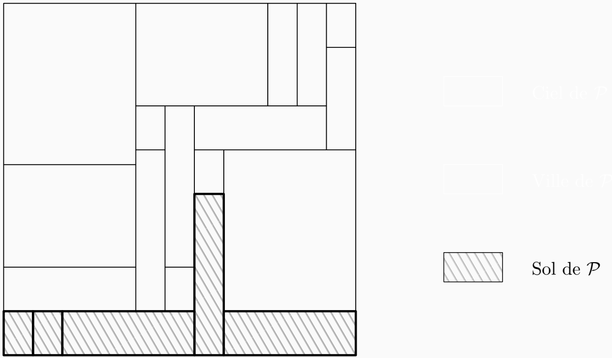
Le théorème est vrai pour toute partition $\mathbb{Q}$-libre $\mathcal{P}$ de $[0,1[^2$ telle qu'il existe une partition $\mathcal{Q}$ de $[0,1[$ telle que pour toute pièce $K \in \mathcal{P}$ on a $\mathrm{pr}_1(K) \in \mathcal{Q}$.



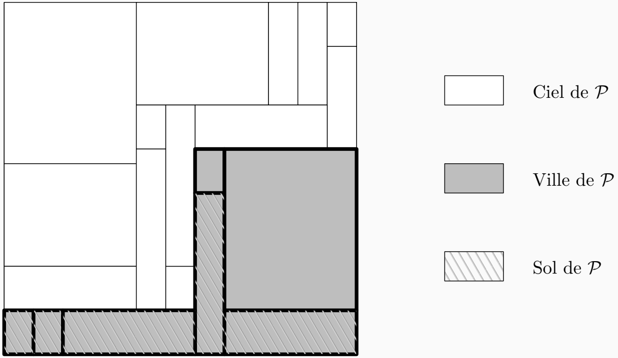
Une lecture d'une partition



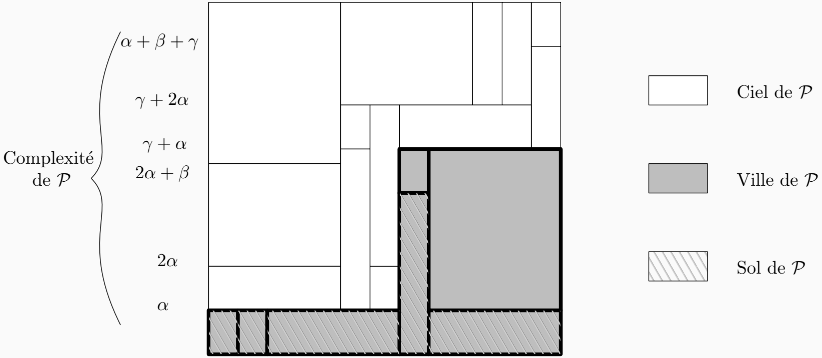
Une lecture d'une partition



Une lecture d'une partition



Une lecture d'une partition



Une lecture d'une partition

Une partition qui possède une complexité vide est une partition qui rentre dans le cadre du cas particulier.

Une lecture d'une partition

Une partition qui possède une complexité vide est une partition qui rentre dans le cadre du cas particulier.

Pour réduire la complexité on regarde la frontière entre la ville et le ciel au niveau du minimum de la complexité.

Une lecture d'une partition

Animation

D’autres résultats

Corollaire

Tout élément de $D(\mathrm{Rec}_d)$ *peut s’écrire comme un produit de conjugués de commutateurs de battages restreints.*

D'autres résultats

Corollaire
Tout élément de $D(\mathrm{Rec}_d)$ *peut s'écrire comme un produit de conjugués de commutateurs de battages restreints.*

Théorème
Le groupe $D(\mathrm{Rec}_d)$ *est simple et est engendré par les transpositions de rectangles.*

D'autres résultats

Corollaire
Tout élément de $D(\mathrm{Rec}_d)$ peut s'écrire comme un produit de conjugués de commutateurs de battages restreints.

Théorème
Le groupe $D(\mathrm{Rec}_d)$ est simple et est engendré par les transpositions de rectangles.

Théorème
Il existe un morphisme de groupes explicite entre Rec_d et $(\mathbb{R}^{\otimes(d-1)} \otimes (\bigwedge_{\mathbb{Z}}^2 \mathbb{R}))^d$ dont le noyau est égal au sous-groupe dérivé $D(\mathrm{Rec}_d)$.

The end

Merci de votre attention.