

**Examen 1 – Durée 45 min – le jeudi 4 octobre 2018**

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

**BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE**

L'énoncé comporte 3 exercices et une question de cours.

**LES QUESTIONS 2.5 ET 3.2 SONT HORS BAREME**

---

**Exercice 1. Sommes. (1 + 3 pts)** Soit  $n$  un entier naturel. On considère la somme suivante

$$S := \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

1. Effectuer le changement d'indice  $i = k + 1$  ;
2. En remarquant que  $\frac{i}{i!} = \frac{1}{(i-1)!}$ , en déduire que

$$S = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

---

**Exercice 2. Applications. (2 + 2 + 2 + 3 + 3 pts)**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 3x + 1$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2 - 1$ . Calculer  $f \circ g$ .
2. En admettant que la fonction  $h : [-3, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ ,  $x \mapsto \sqrt{x+3}$  est bijective, calculer sa fonction réciproque  $h^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow [-3, +\infty[$ .
3. Soit  $E, F, G$  3 ensembles et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. Rappeler la définition de «  $f$  est injective ».
4. Montrer que si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  l'est.
5. On suppose que  $g \circ f$  est injective. L'application  $g$  est-elle nécessairement injective ?

---

**Exercice 3. Inégalités et valeurs absolues. (2 + 3 pts)**

1. Décrire l'ensemble des nombres réels  $x$  tels que

$$|x - 3| \leq 7 \tag{0.1}$$

comme une réunion d'intervalles. En d'autres termes, résoudre l'inéquation (0.1).

2. Décrire l'ensemble des nombres réels  $x$  tels que

$$|x - 3| + |x + 4| \leq 7 \tag{0.2}$$

comme une réunion d'intervalles. En d'autres termes, résoudre l'inéquation (0.2).

---

**Question de cours. (5 pts)** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $F$ . Montrer que

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

## Liste de Questions de cours pour le DS1.

1. Soit  $a_0, \dots, a_n$  des nombres réels. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n a_k - a_{k-1} = a_n - a_0.$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Soit  $E$  un ensemble. Soit  $A, B$  et  $C$  trois parties de  $E$ . Montrer que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

3. Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $F$ . Montrer que

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

4. Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Montrer que

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Donner un exemple pour lequel

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

5. Soit  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Montrer par récurrence sur  $n$  que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On pourra utiliser sans démonstration la formule du triangle de Pascal suivante :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

CORRIGÉ

**Exercice 1. Sommes. (1 + 3 pts)** Soit  $n$  un entier naturel. On considère la somme suivante

$$S := \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

1. Si  $k = 0$ ,  $i = 1$ . Si  $k = n$ ,  $i = n + 1$ . Donc, comme  $k = i - 1$ ,

$$S := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i-1}{i!}.$$

2. De la question précédente, on déduit que

$$S := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{i!} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}.$$

En utilisant l'indication, on a

$$S := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(i-1)!} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}.$$

On fait le changement d'indice  $j = i - 1$ , dans la première somme :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(i-1)!} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}.$$

Ainsi

$$S := \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}.$$

On reconnaît deux sommes identiques sur des ensembles différents. On isole des termes pour que les sommes restantes soient exactement les mêmes :

$$S := 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} - \left( \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \right) + \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

**Exercice 2. Applications. (2 + 2 + 2 + 3 + 3 pts)**

1. Par définition, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2.$$

2. Soit  $y \in [0, +\infty[$ . Posons  $x = h^{-1}(y)$ . Alors  $h(x) = y = \sqrt{x+3}$ . En élevant au carré, on obtient  $y^2 = x + 3$  et  $x = y^2 - 3$ . Ainsi

$$h^{-1}(y) = y^2 - 3.$$

3. L'application «  $f$  est injective » si et seulement si

$$\forall x, y \in E \quad (f(x) = f(y)) \implies x = y.$$

4. Montrer que si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  l'est.

Soit  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que  $f(x) = f(y)$ . En appliquant  $g$  on trouve  $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ . Comme  $g \circ f$  est injective, on en déduit que  $x = y$ .

Finalement,  $f$  est injective.

5. La réponse est non. Un exemple est fourni par  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$  et  $f : ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ .

Le phénomène est que l'image de  $f$  est trop petite pour révéler la non injectivité de  $g$ . D'ailleurs, on peut s'amuser à montrer que si de plus  $f$  est surjective alors  $g$  est injective :

Si  $g \circ f$  est injective et  $f$  est surjective alors  $g$  est injective.

---

**Exercice 3. Inégalités et valeurs absolues. (2 + 3 pts)**

1. Notons  $S$  l'ensemble des solutions. On distingue deux cas.

Si  $x \geq 3$  alors  $|x-3| = x-3$ . Alors l'inéquation (0.1) est équivalente à  $x \leq 10$ . Ainsi  $S \cap [3; +\infty[ = [3; 10]$ .

Si  $x < 3$  alors  $|x-3| = -x+3$ . Alors l'inéquation (0.1) est équivalente à  $x \geq -4$ . Ainsi  $S \cap ]-\infty; 3[ = [-4; 3[$ .

Finalement

$$S = [3; 10] \cup [-4; 3[ = [-4; 10].$$

2. On raisonne comme à la première question en distinguant les cas

(a)  $x \leq -4$ ;

(b)  $-4 < x < 3$ ;

(c)  $x \geq 3$ .

On trouve respectivement  $\emptyset, ]-4; 3[$  et  $\{3\}$ . Finalement

$$S = [-4; 3].$$

---

**Question de cours. (5 pts)** On raisonne par double inclusion. Soit  $x \in f^{-1}(A \cap B)$ . Alors  $f(x) \in A \cap B$ . Donc  $f(x) \in A$  et  $x \in f^{-1}(A)$ . De même  $x \in f^{-1}(B)$ . Donc  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ . Réciproquement, soit  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ . Alors  $f(x) \in A$  car  $x \in f^{-1}(A)$ . De même  $f(x) \in B$  car  $x \in f^{-1}(B)$ . Donc  $f(x) \in A \cap B$ . Par définition,  $x \in f^{-1}(A \cap B)$ .

Voici quelques exemples de rédaction incorrectes.

1. Contexte :  $f : E \longrightarrow F$  est une application donnée.  
«  $f$  est injective signifie soit  $x_1 \in E$  et  $x_2 \in E$  alors  $f(x_1) = f(x_2)$  et  $x_1 = x_2$ . »
2. Contexte :  $f : E \longrightarrow F$  est une application donnée.  
«  $f$  est injective si  $f(a) = f(b) \iff a = b$  »
3. « Si  $|x + 4| \geq 0$  »
4. Contexte :  $f : E \longrightarrow F$  est une application donnée.  
«  $f$  est injective si il a un antécédant ou aucun antécédant. »
5. Contexte :  $f : E \longrightarrow F$  est une application donnée et  $A$  est une partie de  $F$ .  
« Soit  $x \in A$  tel que  $f(x) = y$ . »
6. Contexte :  $f : E \longrightarrow F$  est une application donnée et  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $F$ .  
« Soit  $y \in A \cap B$  tel que  $f(x) = y$  avec  $x \in f^{-1}(A \cap B)$ . »
7. Contexte :  $f$  et  $g$  sont des applications.  
« Il suffit de prendre un élément de  $g \circ f$  et de montrer qu'il appartient à  $f$  »
8. «  $f^{-1}(A \cap B) \implies f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  »
9. Contexte :  $f : E \longrightarrow F$  est une application donnée sans propriété particulière et  $x \in F$ .  
«  $f^{-1}(x)$  »
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.