Feuille 5
Nombres complexes

Exercice 5-1 Soit $f:\mathbb{C}\setminus\{0,-3\}\to\mathbb{C}$ l'application définie par
$$f(z)=\frac{z^2-1}{z(z+3)}$$
Calculer $f(1-i)$ et $f(1+i)$

Correction exercice 5-1
$$f(1-i)=\frac{(1-i)^2-1}{(1-i)(1-i+3)}=\frac{1-2i-1-1}{(1-i)(4-i)}=\frac{-1-2i}{4-i-4i-1}=\frac{-1-2i}{3-5i}=\frac{(-1-2i)(3+5i)}{9+25}$$
$$=\frac{-3-5i-6i+10}{34}=\frac{7-11i}{34}=\frac{7}{34}-\frac{11}{34}i$$
$$f(1+i)=\overline{f(1-i)}=\frac{7}{34}+\frac{11}{34}i$$

Exercice 5-2 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe
$$z=\frac{1+im}{2m+i(m^2-1)},\quad m\in\mathbb{R}$$

Correction exercice 5-2
$$z=\frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}=\frac{(1+im)\big(2m-i(m^2-1)\big)}{4m^2+(m^2-1)^2}=\frac{2m-i(m^2-1)+2im^2+m(m^2-1)}{4m^2+m^4-2m^2+1}$$
$$=\frac{2m-im^2+i+2im^2+m^3-m}{m^4+2m^2+1}=\frac{m(m^2+1)+i(m^2+1)}{(m^2+1)^2}=\frac{m+i}{m^2+1}$$
$$=\frac{m}{m^2+1}+i\frac{1}{m^2+1}$$
Donc $Re(z)=\frac{m}{m^2+1}$ et $Im(z)=\frac{1}{m^2+1}$

Exercice 5-3 Calculer le module et un argument de
$$z=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$$

Correction exercice 5-3
$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$$
Donc $|z|=1$ et un argument de z est $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 5-4

Calculer le module et un argument de
$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\qquad\text{et}\qquad v=1-i$$
En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Correction exercice 5-4
$$|u|=\frac{\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6+2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\sqrt{4\times 2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$
$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2\times 3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
Donc $|u|=\sqrt{2}$ et un argument de u est $-\frac{\pi}{6}$.

$$|v| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$v = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
Donc $|v| = \sqrt{2}$ et un argument de v est $-\frac{\pi}{4}$.
$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$
Donc $\left|\frac{u}{v}\right| = 1$ et un argument de $\frac{u}{v}$ est $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5-5 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $|1-z| \leq \frac{1}{2}$
2. $\mathcal{R}e(1-z) \leq \frac{1}{2}$
3. $\mathcal{R}e(iz) \leq \frac{1}{2}$
4. $\left|1-\frac{1}{z}\right|^2 = 2$
5. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$
6. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$

Correction exercice 5-5

1. L'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tels que $|1-\mathrm{z}| \leq \frac{1}{2}$ est le cercle de centre Ω d'affixe 1 et de rayon $\frac{1}{2}$.
2. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$1 - z = 1 - x - iy$$
$$\mathcal{R}e(1-z) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$
L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe à droite de la droite verticale $x = \frac{1}{2}$.
3. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$iz = i(x+iy) = -y + ix$$
$$\mathcal{R}e(iz) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}$$
L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe au-dessus de la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$
4. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$\left|1-\frac{1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2(x^2+y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 + 2x + y^2 \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 - 1 + y^2$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$$
L'ensemble des solutions est le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
5.
$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3}{z+3}\right|^2 = 4 \Leftrightarrow |z-3|^2 = 4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4((x+3)^2 + y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2$$
$$= 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2 \Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 10x + 9 + y^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = (x+5)^2 - 25 + 9 + y^2 \Leftrightarrow 16 = (x+5)^2 + y^2$$
L'ensemble des solutions est le cercle de centre $(-5,0)$ et de rayon 4.
6.

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right|<2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3}{z+3}\right|^2<4 \Leftrightarrow |z-3|^2<4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2<4((x+3)^2+y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2<4(x^2+6x+9+y^2) \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2$$
$$<4x^2+24x+36+4y^2 \Leftrightarrow 0<3x^2+30x+27+3y^2 \Leftrightarrow 0<x^2+10x+9+y^2$$
$$\Leftrightarrow 0<(x+5)^2-25+9+y^2 \Leftrightarrow 16<(x+5)^2+y^2$$

L'ensemble des solutions est l'extérieur du disque de centre $(-5,0)$ et de rayon 4.

Exercice 5-6 Soit $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Résoudre en coordonnées cartésiennes l'équation dans $\mathbb{C}$:
$$z^2 = 2+2\,i$$
2. Ecrire $2+2i$ sous forme polaire. Résoudre alors l'équation en coordonnées polaires.
3. Déduire des deux questions qui précèdent la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Correction exercice 5-6

1. On cherche z sous la forme $z=a+ib$, avec $a,b\in\mathbb{R}$
$$z^2=2+2i \Leftrightarrow (a+ib)^2=2+2i \Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=2+2i \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2-b^2=2 \\ 2ab=2 \end{cases}$$
On trouve une troisième équation en écrivant que
$$|z^2|=|2+2i| \Leftrightarrow |z|^2=\sqrt{2^2+2^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{8} \Leftrightarrow a^2+b^2=2\sqrt{2} \quad L_3$$
En faisant la somme des lignes L_1 et L_3
$$2a^2=2+2\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$$
En faisant la différence des lignes L_3 et L_1
$$2b^2=2\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow b^2=\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$$
La ligne L_2 indique que a et b sont de même signe donc
$$z=\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1} \quad \text{ou} \quad z=-\sqrt{1+\sqrt{2}}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}$$
2. On met le module de $2+2i$ en facteur
$$2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
On résous $z^2=2+2i$ en utilisant la forme polaire de $2+2i$
$$z^2=2+2i \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2|=|2+2i| \\ \arg(z^2)=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2=2\sqrt{2} \\ 2\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|=\sqrt{2\sqrt{2}} \\ \arg(z)=\frac{\pi}{8}+k\pi, \ \ k\in\{0,1\} \end{cases}$$
Donc
$$z_k=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)}, \quad k\in\{0,1\}$$
Cela donne deux solutions
$$z=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \quad et \quad z=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}e^{i\pi}=-\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$$
3. En comparant les résultats du 1. et du 2., il est clair que
$$\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$
D'où l'on déduit que
$$\sqrt{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Et enfin

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

Exercice 5-7

1. Déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. (Utiliser la formule de Moivre).
2. En déduire une expression simple de $(1+i)^n+(1-i)^n$.

Correction exercice 5-7

1. $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, on en déduit que
$$(1+i)^n=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n$$
D'après la formule de Moivre $\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n=e^{\frac{ni\pi}{4}}$, par conséquent
$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi}{4}}$$
2. $(1-i)^n=\left(\overline{1+i}\right)^n=\left(\overline{1+i}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{ni\pi}{4}}$, donc
$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi}{4}}+2^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{ni\pi}{4}}=2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{ni\pi}{4}}+e^{-\frac{ni\pi}{4}}\right)=2^{\frac{n}{2}}\times 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Exercice 5-8

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes
$$a)\ z_1=7+24i \qquad b)\ z_2=9+40i \qquad c)\ z_3=1+i$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$$a)\ z^2=-2\sqrt{3}+2i \qquad b)\ z^2=3-4i$$

Correction exercice 5-8

1.
   a. Soient a et b deux réels tels que :
   $$(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab=7+24i$$
   En identifiant les parties réelles et imaginaires
   $$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=7\\2ab=24\end{cases}$$
   En prenant le module de $(a+ib)^2=7+24i$, on trouve
   $$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{7^2+24^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25\ \ L_3$$
   En calculant L_1+L_3, on obtient $2a^2=32$, par conséquent $a^2=16$ et $a=\pm4$
   En calculant L_3-L_1, on obtient $2b^2=18$, par conséquent $b^2=9$ et $b=\pm3$
   La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $7+24i$ sont
   $$4+3i \quad \text{et} \quad -4-3i=-(4+3i)$$

   b. Soient a et b deux réels tels que :
   $$(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab=9+40i$$
   En identifiant les parties réels et imaginaires
   $$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=9\\2ab=40\end{cases}$$
   En prenant le module de $(a+ib)^2=9+40i$, on trouve
   $$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{9^2+40^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{81+1600}=\sqrt{1681}=41\ \ L_3$$
   En calculant L_1+L_3, on obtient $2a^2=50$, par conséquent $a^2=25$ et $a=\pm5$
   En calculant L_3-L_1, on obtient $2b^2=32$, par conséquent $b^2=16$ et $b=\pm4$
   La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $9+40i$ sont
   $$5+4i \quad \text{et} \quad -5-4i=-(5+4i)$$

c. Soient a et b deux réels tels que :

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

En prenant le module de $(a+ib)^2 = 1+i$, on trouve

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{1^2+1^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{2} \ \ L_3$$

En calculant $L_1 + L_3$, on obtient $2a^2 = 1+\sqrt{2}$, par conséquent $a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

En calculant $L_3 - L_1$, on obtient $2b^2 = \sqrt{2} - 1$, par conséquent $b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $1+i$ sont

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = -\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$$

2.

a. On utiliser la même méthode que précédemment mais dans cet exemple il y a mieux

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\,e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Donc $z = \pm 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

b. Utilisons une « petite ruse »

$$z^2 = 3 - 4i = 4 - 2\times 2i - 1 = 2^2 - 2\times 2i + i^2 = (2-i)^2$$

Donc $z = \pm(2-i)$

Exercice 5-9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$
2. $2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0$
3. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$
4. $z^3 + 3z - 2i = 0$
5. $(1+2i)z^2 - (9+3i)z - 5i + 10 = 0$

Correction 5-9

1.

$$\Delta = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = 1 - 10i - 25 + 24 + 8i = -2i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2$$

Les racines de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = -\frac{1}{i} + 3 = i + 3 = 3 + i$$

Car $\frac{1}{i} = -i$

Et

$$z_2 = \frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta &= (5+i)^2 - 4\times 2(2+2i) = 25 + 10i - 1 - 16 - 16i = 8 - 6i = 9 - 2\times 3i - 1 \\ &= 3^2 - 2\times 3i + i^2 = (3-i)^2\end{aligned}$$

Les racines de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-(5+i)-(3-i)}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

Et

$$z_2 = \frac{-(5+i)+(3-i)}{4} = \frac{-2-2i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

3. On pose $Z = z^2$, $Z^2 + 10Z + 169 = 0$ a pour discriminant

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2 \times 13)^2 = (10 - 26)(10 + 26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-10 + 24i}{2} = -5 + 12i$$

$$Z_2 = \frac{-10 - 24i}{2} = -5 - 12i$$

On cherche $z = a + ib$ tel que

$$z^2 = Z_1 \Leftrightarrow (a + ib)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \end{cases}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3, on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$,

En faisant la différence de L_3 et de L_1, on trouve que $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$,

D'après L_2, a et b sont de même signe donc $z^2 = Z_1$ a deux solutions

$$z_1 = 2 + 3i \quad et \quad z_2 = -2 - 3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2 = z^2$ ou dire que $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\overline{z_1} = 2 - 3i$ et $\overline{z_2} = -2 + 3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

4. On voit que i est une solution évidente (car $i^3 + 3i - 2i = 0$) donc on peut mettre $z - i$ en facteur.

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 + 3z - 2i = az^3 + (-ia + b)z^2 + (-ib + c)z - ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -ia + b = 0 \\ -ib + c = 3 \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = ia = i \\ c = 3 + ib = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2)$$

Le discriminant de $z^2 + iz + 2$ est $\Delta = i^2 - 4 \times 2 = -9 = (3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z = \frac{-i - 3i}{2} = -2i \quad \text{et} \quad z = \frac{-i + 3i}{2} = i$$

Il y a donc deux solutions, $z_1 = i$ et $z_2 = -2i$.

5.

$$\begin{aligned} \Delta = \left(-(9 + 3i)\right)^2 - 4(1 + 2i)(-5i + 10) &= (3(3 + i)^2) - 4(-5i + 10 + 10 + 20i) \\ &= 9(9 - 1 + 6i) - 4(-25) = 9(8 + 6i) - 4(20 + 15i) = 72 + 54i - 80 - 60i \\ &= -8 - 6i \end{aligned}$$

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-8 - 6i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{64 + 36} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$, d'où l'on tire $b^2 = 9$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 3, d'après l'équation $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -3$ et $\delta = 1 - 3i$ et si $a = -1$ alors $b = 3$ et $\delta = -1 + 3i$

Deuxième méthode

On reprend le système

$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-3}{a}\right)^2 = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 9 = -8a^2 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^4 + 8a^2 - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 8A - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 + 8A - 9 = 0$ est

$\Delta' = 8^2 + 4 \times 9 = 100 = 10^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{-8-10}{2} = -9$ et $A_2 = \frac{-8+10}{2} = 1$, $A_2 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -9$, par contre $a^2 = 1$ admet deux solutions $a = -1$ et $a = 1$.

Si $a = -1$ alors $b = \frac{-3}{a} = 3$ et si $a = 1$ alors $b = \frac{-3}{a} = -1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta = -8 - 6i = 1 - 6i - 9 = (1 - 3i)^2$ donc $\delta = 1 - 3i$ et $\delta = -1 + 3i$

Les solutions de $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(9 + 3i) - (1 - 3i)}{2(1 + 2i)} = \frac{8 + 6i}{2(1 + 2i)} = \frac{4 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 + 3i)(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{4 - 8i + 3i + 6}{10} = 2 - i$$

$$z_2 = \frac{(9 + 3i) + (1 - 3i)}{2(1 + 2i)} = \frac{10}{2(1 + 2i)} = \frac{5}{1 + 2i} = \frac{5(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = 1 - 2i$$

Exercice 5-10 Pour rappel : Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes ω vérifiant $\omega^n = z$

Ces nombres sont appelés les n racines n-ième de z.

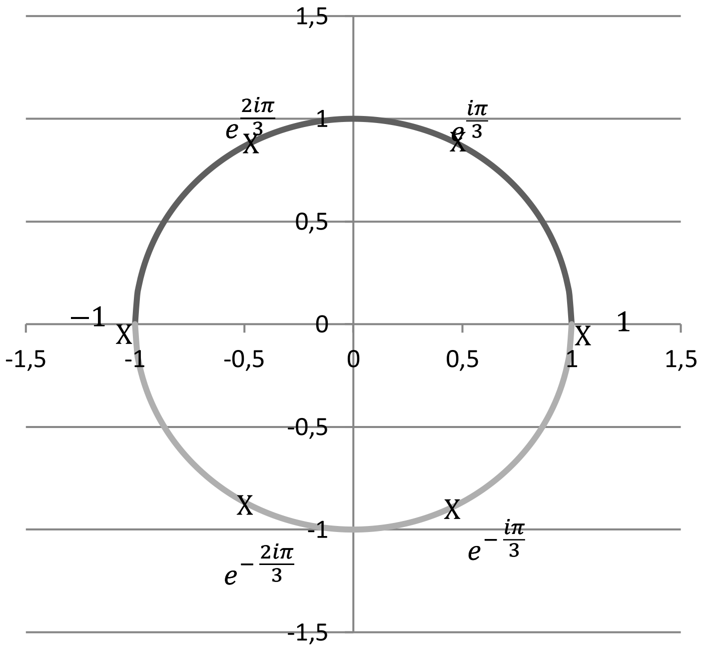
1. Représenter dans le plan complexes $\mathbb{C}$ les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines quatrième de -1.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n - 1$ racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

Correction exercice 5-10

1. $z^6 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3,4,5\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$

   Il y a donc six racines :

   $z_0 = 1; z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}; z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}; z_3 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1; z_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{z_2}$ et $z_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \overline{z_1}$

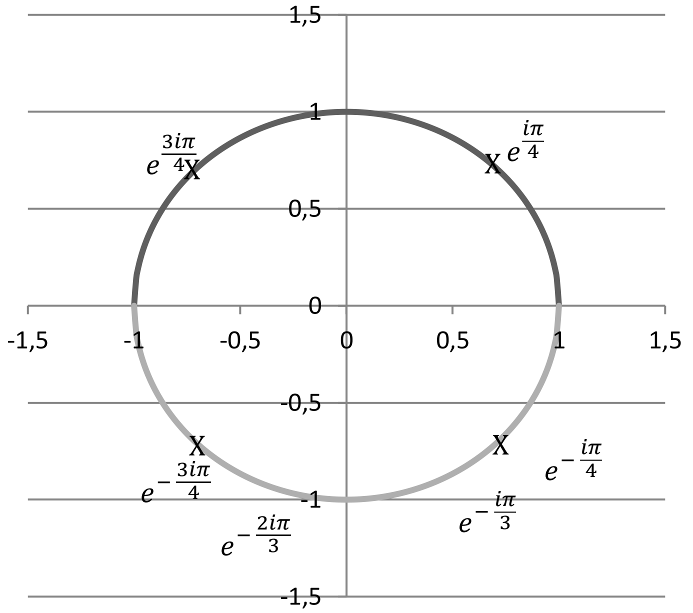


$$z^4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = |-1| \\ \arg(z^4) = \arg(-1) + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 1 \\ 4\arg(z) = \pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, \ \ k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a donc 4 solutions

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}; z_1 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \overline{z_2} \quad \text{et} \quad z_3 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \overline{z_1}$$



2. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Les racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ sont les racines n-ièmes de l'unité privées de 1, c'est-à-dire

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{1,2, \dots, n\} \right\}$$

Exercice 5-11

1. Déterminer les racines cubiques de 1
2. On note $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Exprimer toutes les racines cubiques de 1 en fonction de j.

Correction exercice 5-11

1. Les trois racines de $z^3 = 1$ sont :

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\}$$

Soit $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = z_1$

Première méthode

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{0}{1 - j} = 0$$

Deuxième méthode

$$z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = z_1^2 = j^2$$

Donc $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

3. $1 = j^0$, $z_1 = j$ et $z_2 = j^2$

Exercice 5-12

1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Résoudre $z^8+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

Correction exercice 5-12

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1,i,-1,-i\}$.
2. $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

$$z^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow X^4=e^{\frac{4i\pi}{3}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}|X^4|=\left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right|\\ \arg(X^4)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}|X|^4=1\\ 4\arg(X)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}|X|=1\\ \arg(X)=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\{0,1,2,3\}\end{array}\right.\Leftrightarrow X_k=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)},k\in\{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{\frac{5i\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$
$$z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_3=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{\frac{11i\pi}{6}}=e^{-\frac{i\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=j^2$. Donc $z^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2\Leftrightarrow z^4-j^2=0$. Or

$$z^4-j^2=(z^2-j)(z^2+j)=(z^2-j^4)(z^2-i^2j^4)=(z-j^2)(z+j^2)(z-ij^2)(z+ij^2)$$

D'où les solutions :

$z=j^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z=i\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ et $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

3. On pose $Z=z^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Z^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

Le discriminant est

$$\Delta=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+2+2i\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2=\Delta$ sont

$$\delta=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ et }\ \delta=-\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Z_1=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Z_2=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Z^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Z^2 + jZ + j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{j}\right)^2 + \frac{Z}{j} + 1 = 0$$

Les solutions de $T^2 + T + 1 = 0$ sont $T_1 = j$ et $T_2 = j^2$

Donc $\frac{Z_1}{j} = j \Leftrightarrow Z_1 = j^2$ et $\frac{Z_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Z_2 = j^3 = 1$

Exercice 5-13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 - z = 0$
2. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
3. $\overline{z}^7 = \frac{1}{z^2}$
4. $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

Correction 5-13

1. $z^5 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow z(z^2-1)(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0,1,-1,i,-i\}$
2.

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^6 = -27(z-1)^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$$

On pose $X = \frac{z+1}{z-1}$ et on va résoudre $X^6 = -27$

$$X^6 = -27 \Leftrightarrow \begin{cases} |X^6| = |-27| \\ \arg(X^6) = \arg(-27) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^6 = 27 = 3^3 \\ 6\arg(X) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \arg(X) = \frac{\pi + 2k\pi}{6} = \frac{(2k+1)\pi}{6}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$

Il y a donc 6 solutions

$$X_k = \sqrt{3}e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}}, k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Il reste à trouver les solutions de $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$, soit z_k une solution

$$X_k = \frac{z_k + 1}{z_k - 1} \Leftrightarrow X_k(z_k - 1) = z_k + 1 \Leftrightarrow X_k z_k - X_k = z_k + 1 \Leftrightarrow X_k z_k - z_k = X_k + 1 \Leftrightarrow (X_k - 1)z_k = X_k + 1 \Leftrightarrow z_k = \frac{X_k + 1}{X_k - 1}$$

Avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

L’énoncé ne précise pas sous quelle forme doivent être mise les solutions, si on les veut sous forme algébrique, il faut aller plus loin

$$z_k = \frac{X_k + 1}{X_k - 1} = \frac{(X_k+1)\left(\overline{X_k} - 1\right)}{(X_k - 1)\left(\overline{X_k} - 1\right)} = \frac{|X_k|^2 - X_k + \overline{X_k} - 1}{|X_k|^2 - X_k - \overline{X_k} + 1} = \frac{3 - \left(X_k - \overline{X_k}\right) - 1}{3 - \left(X_k + \overline{X_k}\right) + 1} = \frac{2 - 2iIm(X_k)}{4 - 2Re(X_k)}$$

$$= \frac{1 - iIm(X_k)}{2 - Re(X_k)} = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}$$

Puis remplacer k par 0, puis par 1, etc…

3.

$$\overline{z}^7=\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\overline{z}^7\right|=\left|\frac{1}{z^2}\right|\\ \arg\left(\overline{z}^7\right)=\arg\left(\frac{1}{z^2}\right)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\overline{z}|^7=\left|\frac{1}{z}\right|^2\\ 7\arg(\overline{z})=-2\arg(z)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^7=\frac{1}{|z|^2}\\ -7\arg(z)=-2\arg(z)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^9=1\\ -5\arg(z)=2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=-\frac{2k\pi}{5},\ \ k\in\{0,1,2,3,4\}\end{cases}$$

Il y a 5 solutions

$$\left\{e^{-\frac{2ki\pi}{5}},\qquad k\in\{0,1,2,3,4\}\right\}$$

4. $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0$, on pose $X=z^3$ et on résous

$$X^2-(3+2i)X+2+2i=0$$

$$\Delta=(3+2i)^2-4(2+2i)=9+12i-4-8-8i=-3+4i=-4+2\times 2i+1=(2i+1)^2$$

Il y a deux solutions

$$X_1=\frac{3+2i-(2i+1)}{2}=1\quad\text{et}\quad X_2=\frac{3+2i+2i+1}{2}=2+2i$$

Il reste à résoudre $z^3=1$ et $z^3=2+2i$

$$z^3=1\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,2\},z=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

Car ce sont les racines troisièmes de l'unité, cela donne trois solutions

$$\left\{1,e^{\frac{2i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$z^3=2+2i\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=|2+2i|\\ \arg(z^3)=\arg(2+2i)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$|2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$$

$$2+2i=2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}+i\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}\right)=2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z^3=2+2i\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=2^{\frac{3}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Cela donne trois solutions de plus

$$\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=-1+i,\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$$

Exercice 5-14 Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3+(1-3i)z^2-(6-i)z+10i=0$$

Correction exercice 5-14

1. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que :

$$a^3+(1-2i)a^2-3(1+i)a-2+2i=0\Leftrightarrow a^3+a^2-3a-2+i(-2a^2-3a+2)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+a^2-3a-2=0\\ -2a^2-3a+2=0\end{cases}$$

Les solutions de l'équation $-2a^2-3a+2=0$ sont $a_1=-2$ et $a_2=\frac{1}{2}$

$$(-2)^3+(-2)^2-3(-2)-2=-8+4+6-2=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}\right)-2=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2=\frac{1+2-12-16}{8}=-\frac{25}{8}\neq 0$$

Donc seul -2 est solution de (E)

2. On peut diviser $z^3+(1-2i)z^2-3(1+i)z-2+2i$ par $z+2$

$$\begin{array}{r|l}
z^3+(1-2i)z^2-3(1+i)z-2+2i & z+2 \\ \hline
z^3+2z^2 & z^2+(-1-2i)z-1+i \\ \hline
(-1-2i)z^2-3(1+i)z-2+2i & \\
(-1-2i)z^2+2(-1-2i)z & \\ \hline
(-1+i)z-2+2i & \\
(-1+i)z-2+2i & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Par conséquent

$$z^3+(1-2i)z^2-3(1+i)z-2+2i=(z+2)(z^2+(-1-2i)z-1+i)$$
$$=(z+2)(z^2-(1+2i)z-1+i)$$

Les solutions de (E) sont donc

$$z^2-(1+2i)z+i-1=0$$
$$\Delta=(1+2i)^2-4(i-1)=1+4i-4-4i+4=1$$
$$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$$
$$z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

Exercice 5-15

Montrer que

$$\forall z,z'\in\mathbb{C},|z+z'|\leq|z|+|z'|$$

En déduire que

$$\forall z,z'\in\mathbb{C},\big||z|-|z'|\big|\leq|z-z'|$$

Correction exercice 5-15

$$|z+z'|^2=(z+z')\left(\overline{z+z'}\right)=(z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)=z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}=|z|^2+z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}+|z'|^2$$
$$=|z|^2+2\mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right)+|z'|^2\leq|z|^2+2\left|z\overline{z'}\right|+|z'|^2=|z|^2+2|z|\left|\overline{z'}\right|+|z'|^2$$
$$=|z|^2+2|z||z'|+|z'|^2=(|z|+|z'|)^2$$

Comme $|z+z'|\geq 0$ et $|z|+|z'|\geq 0$

On a $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

Dans $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ on pose $Z=z+z'$ et $Z'=z'$ donc $z=Z-Z'$, cela donne

$$|Z|\leq|Z-Z'|+|Z'|\Leftrightarrow|Z|-|Z'|\leq|Z-Z'|\quad(1)$$

Puis on intervertit Z et Z' dans (1) on obtient $|Z'|-|Z|\leq|Z'-Z|=|-(Z-Z')|=|Z-Z'|\quad(2)$

Comme $\big||Z|-|Z'|\big|=|Z|-|Z'|$ si $|Z|\geq|Z'|$ et $\big||Z|-|Z'|\big|=-(|Z|-|Z'|)=|Z'|-|Z|$ si $|Z'|\geq|Z|$

(1) ou (2) donne le résultat.

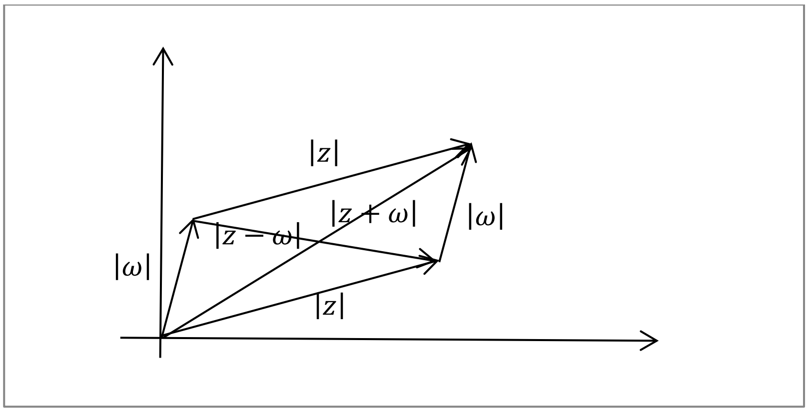
Exercice 5-16 Soient $z,\omega\in\mathbb{C}$. Etablir la relation

$$|z+\omega|^2+|z-\omega|^2=2(|z|^2+|\omega|^2)$$

Et en donner une interprétation géométrique.

Correction exercice 5-16

$$|z+\omega|^2+|z-\omega|^2=(z+\omega)(\overline{z}+\overline{\omega})+(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})$$
$$=|z|^2+z\overline{\omega}+\omega\overline{z}+|\omega|^2+|z|^2-z\overline{\omega}-\omega\overline{z}+|\omega|^2=2(|z|^2+|\omega|^2)$$



C'est l'égalité du parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales

Exercice 5-17 Soit $x \in \mathbb{R}$

1. Calculer $\cos(3x)$ (resp. $\sin(3x)$) en fonction de $\cos(x)$ (resp. de $\sin(x)$).
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$

Correction exercice 5-17

1.

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = e^{3ix} = \left(e^{ix}\right)^3$$

Avec la formule de Moivre

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) = \left(e^{ix}\right)^3 &= (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)\,(i\sin(x)) + 3\cos(x)\,(i\sin(x))^2 + (i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))\end{aligned}$$

En égalisant les parties réelles et imaginaires

$$\begin{cases}\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\,(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ \sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned}\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 &= \frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{2ix} + 4e^{-2ix}\right) + 6}{16} = \frac{2\cos(4x) - 4\times 2\cos(2x) + 6}{16} \\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin^4(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6}{16} \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{-3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{-ix} + 6e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} - 4e^{ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{-5ix} - 3\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) + 2\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right) \\ &= \frac{1}{32}(2\cos(5x) - 3\times\cos(3x) + 2\times 2\cos(x)) \\ &= \frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{3}{32}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x)\end{aligned}$$

Exercice 5-18 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta),\quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta)$$

Correction exercice 5-18

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{k=n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{k=n} \left(e^{i\theta}\right)^k$$

Grâce à la formule de Moivre

Par conséquent si $\theta \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{i\theta}\right)^n}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

Toujours grâce à la formule de Moivre.

Pour trouver U_n et V_n il faut trouver la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression.

Première et pas terrible solution, mais correcte.

$$U_n + V_n = \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{\left(1 - e^{ni\theta}\right)\left(1 - e^{-i\theta}\right)}{\left(1 - e^{i\theta}\right)\left(1 - e^{-i\theta}\right)}$$

Car le conjugué de $1 - e^{i\theta}$ est $1 - e^{-i\theta}$ et non pas, comme le pense de nombreux étudiants $1 + e^{i\theta}$

$$U_n + V_n = \frac{\left(1 - e^{ni\theta}\right)\left(1 - e^{-i\theta}\right)}{\left(1 - e^{i\theta}\right)\left(1 - e^{-i\theta}\right)} = \frac{1 - e^{-i\theta} - e^{ni\theta} + e^{(n-1)i\theta}}{1 - e^{i\theta} - e^{-i\theta} + e^{i\theta}e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1 - (\cos(\theta) - i\sin(\theta)) - (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + \left(\cos\left((n-1)\theta\right) + i\sin\left((n-1)\theta\right)\right)}{1 - \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + 1}$$

$$= \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos\left((n-1)\theta\right) + i\left(\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin\left((n-1)\theta\right)\right)}{1 - 2\cos(\theta) + 1}$$

$$= \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos\left((n-1)\theta\right)}{1 - 2\cos(\theta) + 1} + i\frac{\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin\left((n-1)\theta\right)}{1 - 2\cos(\theta) + 1}$$

Ce qui montre que

$$U_n = \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos\left((n-1)\theta\right)}{1 - 2\cos(\theta) + 1} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin\left((n-1)\theta\right)}{1 - 2\cos(\theta) + 1}$$

Deuxième solution, « la bonne » mais astucieuse pour des L1

$$U_n + V_n = \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \times \frac{-\left(e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{-\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

$$= e^{i\frac{n+1}{2}\theta}e^{-\frac{i\theta}{2}} \times \frac{-2\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ce qui montre que

$$U_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad V_n = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

C'est mieux.

Et puis si $\theta = 2l\pi$ avec $l \in \mathbb{Z}$

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k2l\pi) = \sum_{k=0}^{k=n} 1 = n+1, \ V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k2l\pi) = \sum_{k=0}^{k=n} 0 = 0$$

Exercice 5-19 Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z+c| \leq |1+\overline{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
   Soient $D=\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C=\{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$ le cercle unité.
2. Montrer que l'application

$$f: D \to D$$
$$z \longmapsto \frac{z+c}{1+\overline{c}z}$$

   Est une bijection pour laquelle $f(C)=C$.

Correction exercice 5-19

1.

$$|z+c| \leq |1+\overline{c}z| \Leftrightarrow |z+c|^2 \leq |1+\overline{c}z|^2 \Leftrightarrow (z+c)(\overline{z}+\overline{c}) \leq (1+\overline{c}z)(1+c\overline{z})$$
$$\Leftrightarrow |z|^2+z\overline{c}+c\overline{z}+|c|^2 \leq 1+c\overline{z}+\overline{c}z+|c|^2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2+|c|^2 \leq 1+|c|^2|z|^2 \Leftrightarrow 0$$
$$\leq 1-|c|^2+|c|^2|z|^2-|z|^2 \Leftrightarrow 1-|c|^2+(|c|^2-1)|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-|c|^2)(1-|z|^2)$$
$$\geq 0 \Leftrightarrow 1-|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq |z|^2 \Leftrightarrow 1 \geq |z|$$

2. Il faut montrer que pour tout $z' \in D$ il existe un unique $z \in D$ tel que

$$z'=\frac{z+c}{1+\overline{c}z}$$

Mais il faut d'abord montrer que $f(D) \subset D$, comme $|z| \leq 1$ d'après 1., $|z+c| \leq |1+\overline{c}z|$, ce qui équivaut à

$$\frac{|z+c|}{|1+\overline{c}z|}=\left|\frac{z+c}{1+\overline{c}z}\right|=|f(z)| \leq 1$$

D'où $z \in D \Rightarrow f(z) \in D$

$$z'=\frac{z+c}{1+\overline{c}z} \Leftrightarrow z'(1+\overline{c}z)=z+c \Leftrightarrow z'+z'\overline{c}z=z+c \Leftrightarrow z'-c=z-z'\overline{c}z \Leftrightarrow z'-c=z(1-z'\overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \frac{z'-c}{1-z'\overline{c}}=z$$

Car $|z'\overline{c}|<1$ et donc le dénominateur n'est pas nul

On a montré que pour tout $z' \in D$, il existe un unique z tel que $z'=f(z)$, il reste à montrer que $z \in D$. On pose $c'=-\overline{c}$, $|c'|<1$

$$z=\frac{z'+c'}{1+z'\overline{c'}} \Rightarrow |z|=\left|\frac{z'+c'}{1+z'\overline{c'}}\right| \leq 1$$

D'après le 1.

Montrons que $f(C)=C$.

Soit $z \in C$, donc $|z|=1$

$$|f(z)|=\left|\frac{z+c}{1+\overline{c}z}\right|=\left|\frac{z\left(1+\frac{c}{z}\right)}{1+\overline{c}z}\right|=\left|\frac{z\left(1+\frac{c\overline{z}}{|z|^2}\right)}{1+\overline{c}z}\right|=|z|\left|\frac{1+c\overline{z}}{1+\overline{c}z}\right|=\left|\frac{1+c\overline{z}}{1+\overline{c}z}\right|=\frac{|1+c\overline{z}|}{|1+\overline{c}z|}=\frac{\left|\overline{1+c\overline{z}}\right|}{|1+\overline{c}z|}$$
$$=\frac{|1+\overline{c}z|}{|1+\overline{c}z|}=1$$

Cela montre que $f(C) \subset C$, il faut montrer que $C \subset f(C)$

Soit $z' \in C$, z' admet un unique antécédent z, on a $z'=f(z)$

$$z=\frac{z'-c}{1-z'\overline{c}}=\frac{z'+c'}{1+z'\overline{c'}}$$

Si on pose $c'=-\overline{c}$ et comme précédemment $|z|=1$, ce qui montre que pour tout $z' \in C$, il existe $z \in C$ tel que $z'=f(z) \in f(C)$

Exercice 5-20 Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui représentent les transformations du plan suivantes :

1. La translation du vecteur d'affixe $-2+i$.
2. La symétrie centrale du centre i.
3. La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.

Correction exercice 5-20

1. $z \to z-2+i$
2. $f: z \to -z+b$, puis on utilise le fait que $f(i)=i$ pour trouver que $b=2i$.

3. $f: z \to e^{i\frac{\pi}{6}}z + b$, puis on utilise le fait que $f(1) = 1$ pour trouver que $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{i}{2}$

Exercice 5-100

Soit $z = \frac{3}{\sqrt{3}+i}$, calculer z^4.

Correction exercice 5-100

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \left(\sqrt{3} + i\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{6}} = 16e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Donc

$$z^4 = \frac{3^4}{16e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{81}{16}e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \frac{81}{16}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{81}{32}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

Exercice 5-101

Soit (E) l'équation

$$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Correction exercice 5-101

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ une solution de (E)

$$x_0^4 - 3x_0^3 + (2 - i)x_0^2 - 3 + i = 0 \Leftrightarrow x_0^4 - 3x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 3 + i(-x_0^2 + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4 - 3x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 3 = 0 \\ -x_0^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$a_1 = -1$ est solution de $x_0^4 - 3x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 3 = 0$ et $a_2 = 1$ est solution de $x_0^4 - 3x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 3 = 0$, donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$ en facteur.

2. Il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(aX^2 + bX + c)$$

On développe

$$(X^2 - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (c - a)X^2 - bX - c$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$

Il reste à trouver les solutions de $X^2 - 3X + 3 - i = 0$

$$\Delta = 9 - 4(3 - i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$$

Les racines carrées du discriminant sont $\delta = \pm(1 - 2i)$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2} = 1 - i$$
$$X_2 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{-1,1,1 - i, 2 + i\}$$

Exercice 5-102

1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c, d différents de 1, qui sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.

2. Montrer, pour tout nombre complexe z, l'égalité :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$$

Correction exercice 5-102

1. Ce sont les racines cinquième de l'unité différentes de 1, c'est-à-dire $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in \{1,2,3,4\}$.

2.

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{z^5 - 1}{z - 1}$$

Donc les 4 racines de $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ sont les $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in \{1,2,3,4\}$, d'où le résultat.

Exercice 5-103

Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction exercice 5-103

1.

$$u^4 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} |u^4| = |-4| \\ \arg(u^4) = \arg(-4) + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^4 = 4 \\ 4\arg(u) = \pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(u) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \ \ k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$u_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$u_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$$

$$u_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i = \overline{u_1}$$

$$u_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i = \overline{u_0}$$

2.

$$(z + 1)^4 + 4(z - 1)^4 = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^4 = -4(z - 1)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^4 = -4$$

On pose $u = \frac{z+1}{z-1}$, il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant z en fonction de u.

$$u = \frac{z + 1}{z - 1} \Leftrightarrow u(z - 1) = z + 1 \Leftrightarrow zu - u = z + 1 \Leftrightarrow zu - z = u + 1 \Leftrightarrow z(u - 1) = u + 1 \Leftrightarrow z = \frac{u + 1}{u - 1}$$

$$z_0 = \frac{u_0 + 1}{u_0 - 1} = \frac{1 + i + 1}{1 + i - 1} = \frac{2 + i}{i} = 1 - 2i$$

$$z_1 = \frac{u_1 + 1}{u_1 - 1} = \frac{-1 + i + 1}{-1 + i - 1} = \frac{i}{-2 + i} = \frac{i(-2 - i)}{(-2)^2 + 1^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$z_2 = \frac{u_2 + 1}{u_2 - 1} = \frac{\overline{u_1} + 1}{\overline{u_1} - 1} = \overline{z_1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$z_3 = \frac{u_3 + 1}{u_3 - 1} = \frac{\overline{u_0} + 1}{\overline{u_0} - 1} = \overline{z_0} = 1 + 2i$$

Exercice 5-104

Soit $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z(1-z)$

1. Déterminer les points fixes de f c'est-à-dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

   Indication : $z(1-z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$

Correction exercice 5-104

1.

$$f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z(1-z) - z = 0 \Leftrightarrow z - z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2.

$$\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \leq \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4}$$

$$\leq \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Exercice 5-105

1. Résoudre $z^3 = -2 + 2i$
2. Résoudre $z^3 = -8i$
3. Résoudre

$$\frac{1}{2}z^6 + (1+3i)z^3 + 8 + 8i = 0$$

On rappelle que $\sqrt{676} = 26$.

Correction exercice 5-105

1. $X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}}$

   Donc

$$X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k$$

$$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$X_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$$

$$X_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

2.

$$X^3 = -8i = 2^3 e^{\frac{3i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^3 \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^3 \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0 = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$$

$$X_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$X_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

3. On pose $X = Z^3$

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2 + (1+3i)X + 8 + 8i = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (1+3i)^2 - 4 \times \frac{1}{2}(8+8i) = 1 + 6i - 9 - 16 - 16i = -24 - 10i$$

Les racines carrés de $-24 - 10i$:

$$(a+ib)^2 = -24 - 10i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -24 - 10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ ab = -5 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2 + b^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2 = 2$ donc $a^2 = 1$, c'est-à-dire $a = \pm 1$.

En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2 = 50$ donc $b^2 = 25$, c'est-à-dire $b = \pm 5$.

D'après L_2, a et b sont de signes différents donc les deux racines carrés de $-24 - 10i$ sont : $1 - 5i$ et $-1 + 5i$.

L'équation du second degré a pour racine :

$$X_1 = \frac{-(1+3i) - (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2 - 2i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(1+3i) + (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2i$$

Les six racines de

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

Sont les six complexes trouvés en 1°) et 2°).

Exercice 5-106 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^4(x)$.

Correction exercice 5-106

1. $\cos^2(x)\sin^3(x) = (1 - \sin^2(x))\sin^3(x) = \sin^3(x) - \sin^5(x)$
2.

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16}$$
$$= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + 4e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2\cos(4x) + 4 \times 2\cos(2x) + 6}{16}$$
$$= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

Exercice 5-107

1. Identifier les transformations dans le plan complexe les transformations suivantes :
   a. $f_1: z \to z + 3 - 2i$
   b. $f_2: z \to e^{i\frac{2\pi}{7}}z$
   c. $f_3: z \to e^{i\frac{2\pi}{3}}z - 1$
   d. $f_4: z \to 3z - 5 + i$

2. Donner les applications qui représentent dans le plan complexe les transformations suivantes :
   a. La translation de vecteur d'affixe $-2+i$
   b. La symétrie de centre i.
   c. La rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre 1.
   d. L'homothétie de rapport 3 et de centre $1+2i$.

Correction exercice 5-107

1. a. C'est la translation de vecteur $3-2i$.

   b. C'est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{7}$ et de centre O.

   c. Il faut d'abord trouver le point fixe

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}z-1=z\Leftrightarrow z\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}-1\right)=1\Leftrightarrow z=\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=\frac{1}{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$$
$$=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

   Donc il s'agit de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de centre $\frac{-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$.

   d. Il faut d'abord trouver le centre

$$3z-5+i=z\Leftrightarrow z=\frac{5}{2}-\frac{i}{2}$$

   Il s'agit donc de l'homothétie de rapport 3 et de centre $\frac{-5+i}{1-3}=\frac{5}{2}-\frac{i}{2}$.

2. a. $z\to z-2+2i$

   b. $f(z)-i=-(z-i)$ soit encore $f(z)=-z+2i$

   c. $f(z)-1=e^{i\frac{\pi}{6}}(z-1)$, soit encore $f(z)=e^{\frac{i\pi}{6}}z+1-e^{\frac{i\pi}{6}}$

   d. $f(z)-(1+2i)=3\big(z-(1+2i)\big)$, soit encore $f(z)=3z-2-4i$

Exercice 5-108

Soit h une homothétie de rapport k et h' une homothétie de rapport k' et de centres respectifs Ω, d'affixe ω, et Ω', d'affixe ω'.

1. Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que les composés $h\circ t$ et $t\circ h$ sont des homothéties de rapport k.
2. Si $kk'\neq 1$, montrer que $h\circ h'$ est une homothétie de rapport kk' et que les centres de h, h' et $h\circ h'$ sont alignés.
3. Si $kk'=1$, montrer que $h\circ h'$ est une translation.

Correction exercice 5-108

1. Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et soit a l'affixe du vecteur $\vec{u}$. Soit M un point d'affixe z, $M'=t(M)$ le point d'affixe z' et $M''=h\circ t(M)$ le point d'affixe z'', donc il existe $k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $b\in\mathbb{C}$ tels que $z''=kz'+b$

   On a

$$\begin{cases}M'=t(M)\\ h\circ t(M)=h\big(t(M)\big)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z'=z+a\\ z''=kz'+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z'=z+a\\ z''=k(z+a)+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z'=z+a\\ z''=kz+ka+b\end{cases}$$

   On en déduit que $h\circ t$ est une homothétie de rapport k.

   Question non demandée : quel est son centre ?

   Pour cela on cherche son point fixe Ω_1 d'affixe ω_1

$$\omega_1=k\omega_1+ka+b\Leftrightarrow\omega_1(1-k)=ka+b\Leftrightarrow\omega_1=\frac{ka+b}{1-k}$$

Si de plus on exprimer l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de Ω le centre de h d'affixe ω. Le centre de h est le point fixe de h d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$ (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc $b = \omega(1-k)$, ce que l'on remplace dans

$$\omega_1 = \frac{ka+b}{1-k} = \frac{ka+\omega(1-k)}{1-k} = \omega + \frac{ka}{1-k}$$

Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et soit a l'affixe du vecteur $\vec{u}$. Soit M un point d'affixe z, $M' = h(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = t \circ h(M)$ le point d'affixe z'', donc il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $z' = kz + b$

$$\begin{cases} M' = h(M) \\ t \circ h(M) = t\big(h(M)\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = kz + b \\ z'' = z' + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = kz + b \\ z'' = kz + b + a \end{cases}$$

On en déduit que $t \circ h$ est une homothétie de rapport k.
Question non demandée : quel est son centre ?
Pour cela on cherche le point fixe Ω_2 d'affixe ω_2

$$\omega_2 = k\omega_2 + a + b \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{a+b}{1-k}$$

Si de plus on exprimer l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de Ω le centre de h d'affixe ω. Le centre de h est le point fixe de h d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$ (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc $b = \omega(1-k)$, ce que l'on remplace dans

$$\omega_2 = \frac{a+b}{1-k} = \frac{a+\omega(1-k)}{1-k} = \omega + \frac{a}{1-k}$$

2. Soit M un point d'affixe z, $M' = h'(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ h'(M)$ le point d'affixe z''.
   Il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ avec $kk' \neq 1$ et $b, b' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

   Donc $z'' = k(k'z + b) + b' = kk'z + kb + b'$
   Ce qui montre que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk' car $kk' \neq 1$.
   Le centre de h a pour affixe ω et celui de h' a pour affixe ω' tels que

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{b'}{1-k'} \\ \omega' = \dfrac{b}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k')\omega' \\ b' = (1-k)\omega \end{cases}$$

   On en déduit que

$$z'' = kk'z + kb + b' = kk'z + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega$$

   Le centre de $h \circ h'$ est le point fixe Ω'' d'affixe ω''

$$\omega'' = kk'\omega'' + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega \Leftrightarrow \omega'' = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega}{1-kk'}$$

$$\omega'' - \omega = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega}{1-kk'} - \omega = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega - (1-kk')\omega}{1-kk'}$$

$$= \frac{k(1-k')\omega' - k\omega + kk'\omega}{1-kk'} = \frac{k\omega'(1-k') - k\omega(1-k')}{1-kk'}$$

$$= \frac{k(1-k')}{1-kk'}(\omega' - \omega)$$

   Ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$
   Donc les trois centres sont alignés.
3. Soit M un point d'affixe z, $M' = h'(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ h'(M)$ le point d'affixe z''. Il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ avec $kk' \neq 1$ et $b, b' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

Donc $z'' = k(k'z + b) + b' = kk'z + kb + b' = z + kb + b'$

Ce qui montre que $h \circ h'$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $kb + b'$

On peut, si on veut exprimer l'affixe de ce vecteur en fonction de ω et de ω' les affixes des centres des deux homothéties. On a

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{b'}{1-k'} \\ \omega' = \dfrac{b}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k')\omega' \\ b' = (1-k)\omega \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = kk'z + kb + b' = z + (k-1)\omega' + (1-k)\omega = z + (1-k)(\omega - \omega')$$

Exercice 5-109

On rappelle que

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}; \quad j^2 = \bar{j} \quad \text{et que} \quad j^3 = 1$$

Soit r une transformation du plan qui a un point M associe le point M' d'affixe $M' = r(M)$ d'affixe $z' = -j^2 z + 1 + j^2$

Soit r' une transformation du plan qui a un point M d'affixe z associe le point $M' = r'(M)$ d'affixe $z' = iz + 1 - i$

1. Montrer que r est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre Ω et l'angle de la rotation.
2. Montrer que r' est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre Ω' et l'angle de la rotation.
3. Calculer l'affixe z'' du point $M'' = r \circ r'(M)$, où M est un point d'affixe z. Que peut-on en déduire de $r \circ r'$?

Correction exercice 5-109

1. $-j^2 = e^{i\pi} e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ donc r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, son point fixe vérifie $r(\Omega) = \Omega$ donc $\omega = -j^2\omega + 1 + j^2$, ce qui entraine que :
$$\omega = \frac{1 + j^2}{1 + j^2} = 1$$
2. On cherche le point fixe Ω' tel que $r'(\Omega') = \Omega'$, c'est-à-dire le point d'affixe ω' tel que
$$\omega' = i\omega' + 1 - i \Leftrightarrow \omega'(1 - i) = 1 - i \Leftrightarrow z = 1$$
Donc $\Omega' = \Omega$
$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$
Donc r' est la rotation de centre $\Omega(1,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. Soit z'' l'affixe M'', z' l'affixe de $M' = r'(M)$ et z l'affixe de M
$$z' = -j^2 z + 1 + j^2$$
$$z'' = iz' + 1 - i$$
Donc
$$z'' = iz' + 1 - i = z'' = i(-j^2 z + 1 + j^2) + 1 - i = -ij^2 z + i + ij^2 + 1 - i$$
$$= -ij^2 z + ij^2 + 1$$
Donc $r \circ r'$ est une rotation d'angle un argument de
$$-ij^2 = e^{i\pi} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\pi\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}}$$
Et le centre est Ω'', d'affixe ω'' vérifie
$$\omega'' = -ij^2\omega'' + ij^2 + 1 \Leftrightarrow \omega''(1 + ij^2) = 1 + ij^2 \Leftrightarrow \omega'' = 1$$