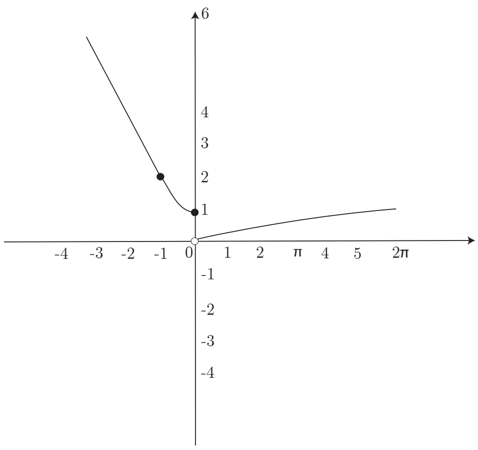
Feuille 8 : Limites et continuité des fonctions

Exercice 8-1 Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.



2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = 2$ c) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$ e) $\lim\limits_{x\to \pi-} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 2$ d) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ f) $\lim\limits_{x\to \pi+} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui donner leur valeur.

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe et est égale à 2 car $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = f(-1) = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas car $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$ existe et est égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ car $\lim\limits_{x\to \pi-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi+} f(x) = f(\pi) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 8-2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7}$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$

7) $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|$ 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$ 9) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$ 12) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x$

13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$ 15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ 17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$ 18) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$

On considère $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $E(x)$ est la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

19) $\lim\limits_{x\to 0} E(x+1)$ 20) $\lim\limits_{x\to 0} xE(\dfrac{1}{x})$ 21) $\lim\limits_{x\to +\infty} xE(\dfrac{1}{x})$

Réponse :

1. $\forall\, x \neq 2,\ \dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$. Donc, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.
2. $\forall\, x \neq 1,\ \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{3}{2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 4+} \dfrac{2x+5}{x-4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4-} \dfrac{2x+5}{x-4} = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^9(3-\frac{17}{x^9})}{x^7} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(3-\dfrac{17}{x^9}) = +\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3(3-\frac{5}{x}+7)}{x^3(\frac{8}{x^3}+\frac{2}{x^2}-5)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\frac{5}{x}+7}{\frac{8}{x^3}+\frac{2}{x^2}-5} = -\dfrac{3}{5}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x^3(1+\frac{2}{x^3})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x^2}}{x(1+\frac{2}{x^3})} = 0$.
7. Il suffit d'évaluer $|x-1|$ en 1. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} |x-1| = 0$.
8. Comme $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|$ n'est pas seulement 0, mais 0^+, on conclut que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$.
9. Il suffit d'évaluer $\dfrac{1}{|x-1|}$ en 5. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{|x-1|} = \dfrac{1}{|5-1|} = \dfrac{1}{4}$.
10. $\forall x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \dfrac{\sqrt{1+x}+1}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} = \dfrac{\sqrt{1+x}+1}{1+x-1} = \dfrac{\sqrt{1+x}+1}{x}$.

    Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1} = -\infty$.
11. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{x}{1-x^2}$.

    Donc, $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right) = +\infty$.
12. $\forall x > 0,\ \sqrt{x^2+2x+5} - x = \dfrac{x^2+2x+5-x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \dfrac{2+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1}$.

    Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x = 1$.
13. On peut se servir des gendarmes. En effet, $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 0$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0- \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0+$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.
14. Comme dans le point précédent, on utilisera le fait que la fonction sin soit borné. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $|x\sin(\dfrac{1}{x})| \leq |x|$, alors la limite recherchée est 0.
15. Comme pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x} = \dfrac{x^2(1+\frac{\sin(x)}{x^2})}{x^2(1+\frac{\cos(x)}{x^2})} = \dfrac{1+\frac{\sin(x)}{x^2}}{1+\frac{\cos(x)}{x^2}}$, la limite recherchée est 1.
16. On se sert de la définition de x^x. En d'autres termes,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp(x\ln(x)) = \exp(\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)) = e^0 = 1 \quad .$$

17. Comme $|\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\sqrt{x} \leq 0$, $\dfrac{-1}{1+\sqrt{x}} \leq \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}} \leq \dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$. La limite des deux expressions, minorante et majorante, est 0. Par les gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}} = 0$.
18. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x-1 \leq x-\sin(x) \leq x+1$, le fait que la fonction exp soit croissante implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} \leq e^{x-\sin(x)} \leq e^{x+1}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$.
19. Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} E(x) = -1$ tandis que $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = 0$, et que pour $|x| < \dfrac{1}{2}$ ("suffisamment proche" de 0) $\dfrac{1}{2} < x+1 < \dfrac{3}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} E(x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x+1) = 1$.

20. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $E(x) \leq x < E(x)+1$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x})+1$, ou encore, $\frac{1}{x}-1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$. Alors, $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\frac{1}{x}-1) \leq \lim\limits_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x}) \leq \lim\limits_{x\to 0^+} x\frac{1}{x}$. Par les gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x}) = 1$. Quant aux valeurs négatives de x, le même raisonnement donne les inégalités $x\frac{1}{x} \leq xE(\frac{1}{x}) < x(\frac{1}{x}-1)$. Encore une fois, la limite est 1.
21. Quand $x \to +\infty$, $1/x \to 0$ donc $E(1/x) = 0$ et puis $xE(1/x) = 0 \to 0$.

Exercice 8-3 Rappelons que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln^3 x$ 9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$

Réponse :

1. $\forall x > 0$, $\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\frac{\sin(2x)}{2x}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\sqrt{x} = 0$.
   Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = 0$.
2. $\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)}\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
   D'après l'exercice 2, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0} = \tan'(0) = 1$.
4. $\forall x \neq \frac{1}{2}$, $\frac{\cos(\pi x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(\pi x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$.
   Donc, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\pi\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.
5. $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right]$, $(2x^2+x-1)\tan(\pi x) = \frac{2x-1}{\cos(\pi x)}(x+1)\sin(\pi x)$.
   D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2+x-1)\tan(\pi x) = -\frac{2}{\pi}\times\frac{3}{2} = -\frac{3}{\pi}$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$.
   Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
7. $\forall x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$, $\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln^3 x = \lim\limits_{x\to 0} \left(x^{\frac{1}{6}} \ln x\right)^3 = 0$ par croissance comparée.

9. $\forall\, x > 0$, en posant $X = \ln x$ on a $\dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \dfrac{e^{X^2}}{e^{nX}} = e^{X^2-nX}$.

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X^2-nX} = +\infty$.

Exercice 8-4

1) Si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 5$, trouver $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2) Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -2$, trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Réponse :

1. On pose $g(x) = \dfrac{f(x)-5}{x-2}$ pour $x \neq 2$. Alors, $f(x) = (x-2)g(x) + 5$ pour $x \neq 2$ et $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$. Comme $x-2$, $g(x)$ et la fonction constante 5 ont chacune une limite quand x tend vers 2, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x-2) \lim\limits_{x\to 2} g(x) + 5 = 5$.
2. En posant $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ pour $x \neq 0$, on procède comme dans le premier point pour conclure que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} xg(x) = 0.(-2) = 0$.

Exercice 8-5 Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Réponse :

1. Si $x_0 \in [0,1[$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2 = f(x_0)$. En un tel point, f est continue. Un raisonnement similaire donne la même conclusion pour $x_0 \in]1,2]$. Il reste à vérifier la continuité au point $x = 1$. Alors, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ ainsi que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x-1) = 1$. Comme $f(1) = 1^2 = 1$, on conclut que f est continue en 1 aussi. Ainsi f est continue sur $[0,2]$.
2. On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$. Alors, si $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$ tandis que si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Par conséquent, $f(x) = x+1$ si $x > 0$, et $f(x) = x-1$ si $x < 0$. Les limites de ces deux expressions quand x tend vers 0 sont 1 et -1 respectivement f n'est pas continue au point $x = 0$. Néanmoins, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1$. On en déduit que f est continue à droite en 0. Aux autres points, f est continue parce qu'elle est déterminée par des polynômes du premier degré.
3. On peut aussi écrire $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le -1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ nx & \text{si } \dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n},\ \text{où } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\} \end{cases}$

   En tant que fonctions affines, la fonction f est continue sur $]-\infty, -1[$, sur $]1, +\infty[$ et $\left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[$, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{n}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{n}^-} nx = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{n}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{n}^+} (n-1)x = \dfrac{n-1}{n}$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{n}^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \frac{1}{n}^+} f(x)$, ce qui montre que f n'est pas continue en $\dfrac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$. On déduit aussi de ces calculs que f est continue à gauche à chaque point $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$.
Ensuite, pour tout $x \neq 0$ on a $1/x \leq E(1/x) < 1/x + 1$. Si $x > 0$ alors $1 \leq xE(1/x) < 1 + x$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. De même si $x < 0$ alors $1 + x < xE(1/x) \leq 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$, ce qui montre que f est continue en 0.
Finalement, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} -x = 1$ tandis que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} -2x = 2$. Par conséquent, en -1 f n'est continue qu'à gauche.

Exercice 8-6

1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Réponse :

1. La fonction est continue en tout poin $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ parce que sur chacun des deux intervalles qui forment cet ensemble elle est déterminée par un polynôme. Comme $\lim\limits_{x \to 2^-} f_k(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4$ et que c'est aussi $f_k(2)$, pour que f_k soit continue en 2, il faut et il suffit que $\lim\limits_{x \to 2^+} f_k(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} k - x^2 = 4$. Ceci équivaut à $k = 8$.
2. On détermine d'abord $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{1+x^3}{1+x} = 1 - x + x^2$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1+x^3}{1+x} = \lim\limits_{x \to -1} 1 - x + x^2 = 3$. Il suffit alors définir $g(-1) = 3$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq -1$.

Exercice 8-7 Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Réponse :

On peut calculer f à certaines valeurs entières entre -4 et 4. On trouve $f(-4) = -3$, $f(-3) = 19$, $f(0) = 1$, $f(1) = -13$, $f(3) = -7$, $f(4) = 5$. Les changements de signe et le théorème des valeurs intermédiaires nous montrent que f a un zéro sur chacun des intervalles $[-4, -3]$, $[0, 1]$ et $[3, 4]$.

Exercice 8-8 Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Réponse :

La fonction $f : x \mapsto \tan x + \dfrac{x}{3}$ est continue sur l'intervalle $[3\pi/4, \pi]$ et $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1 + \dfrac{\pi}{4} < 0$ et $f(\pi) = \dfrac{\pi}{3} > 0$. Comme 0 est une valeur intermédiaire entre $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $f(\pi)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[3\pi/4, \pi]$.

Exercice 8-9 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Réponse :

Comme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel y, il existe un réel x tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est surjective.

Exercice 8-10 Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Réponse :

Si l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$, alors f est une fonction constante à valeur entiére. Ceci est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires et du fait évident qu'entre deux entiers distincts il existe des réels qui ne sont pas des entiers. Pour ce dernier constat, notons que si$m < n$ sont deux entiers distincts alors, $m + \dfrac{n-m}{n-m+1}$ est un rationnel non entier entre m et n.

Si l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$, alors f est une fonction constante à valeur rationnelle. Démontrons cet énoncé. Par l'absurde, supposons que f soit une fonction continue, non constante et à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Il existe donc deux points x et y tels que $f(x) \neq f(y)$. On utilise alors le résultat bien connu qu'entre deux nombres rationnels $a = f(x)$ et $b = f(y)$ distincts, on peut toujours trouver au moins un nombre irrationnel (par exemple $a + (b-a)/\sqrt{2}$). Par le théorème des valeurs intermédiaires, f atteint donc une valeur irrationnelle, ce qui est contradictoire.

Exercice 8-11 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Réponse :

1. La fonction f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$. Comme $n \geq 2$ et $x \geq 1$, f_n' est strictement positive sur $[1, +\infty[$ et f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $f(1) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Donc f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$ et comme $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Par la définition de f_{n+1}, $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1$. Or $f_n(x_n) = 0$, soit $x_n + 1 = x_n^n$. Donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1)$. Comme $x_n > 1$, on a $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. Comme $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, $f_{n+1}(x_n) > 0 \Leftrightarrow f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$. Or f_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc, $x_n > x_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout entier $n \geq 2$ la suite $(x_n)_{n\geq2}$ est décroissante. Comme $(x_n)_{n\geq2}$ est décroissante et minorée par 1, elle converge vers une limite $l \geq 1$.
4. Supposons $l > 1$. Pour tout entier $n \geq 2$, $x_n > l$, soit $x_n^n > l^n$. Or $\lim_{n\to+\infty} l^n = +\infty$, donc par comparaison, $\lim_{n\to+\infty} x_n^n = +\infty$. En contradiction avec $x_n^n = x_n + 1$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n + 1 = l + 1$. Donc, $l = 1$.

Exercice 8-12 Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Réponse :

1. **Vrai** théorème des bornes atteintes.
2. **Faux** la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,\,1[$ à valeurs dans $]1,\,+\infty[$.
3. **Faux** la fonction sinus est continue sur $]0,\,2\pi[$ à valeurs dans $[-1,\,1]$; un autre exemple est toute fonction constante sur $]a, b[$.
4. **Vrai** théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 8-101 Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln^2 x-\sqrt{x}$ 6) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to1+} \ln x\ln(\ln x)$ 8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ 9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$

Réponse :

1. $\forall x>3,\ \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=\dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}=\dfrac{1}{x}\dfrac{8}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=0$.
2. $\forall x>0,\ \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)}=\dfrac{x-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)=+\infty$.
3. $\forall x>0,\ \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}$.
4. $\forall\, x\in\left]-\dfrac{\pi}{3};\,0\right[\cup\left]0;\,\dfrac{\pi}{3}\right[,\ \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}=\dfrac{2}{3}\,\dfrac{\sin(2x)}{2x}\,\dfrac{3x}{\sin(3x)}$. Donc, d'après la question 2.1, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}=\frac{2}{3}$.
5. $\ln^2 x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\left(\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac14}}\right)^2-1\right)$. Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\frac14}}=0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln^2 x-\sqrt{x}=-\infty$.
6. $\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{\ln\left(1-2\sin^2(x)\right)}=\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}\times\dfrac{-2\sin^2 x}{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)}\times\dfrac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{-2\sin^2 x}$.

   Or, $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)=0$ et $\displaystyle\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$, soit par composée, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}=1$.

   De même, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2 x}{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)}=1$.

   Par la méthode de la question 4., on trouve $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{-2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin x}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$.

   Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\frac{9}{4}$.
7. On pose $u=\ln(x)$. Alors la limite devient $\displaystyle\lim_{u\to0^+}u\ln(u)$, soit encore $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}-\frac{\ln(u)}{u}$. Par croissance comparée, cette limite est 0.
8. $\forall\, x>0,\ \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=\dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x}=1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=1$.

9. On étudie $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$ comme s'il s'agissait d'une fraction de polynômes puisqu'on peut comparer les croissances des puissances de x à $\ln(x)$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{x(\frac{\ln x}{x}+1)} = 1$.

Exercice 8-102 Soit f une fonction décroissante sur $]0,+\infty[$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f(x) \geq 0$.

Réponse :

Supposons par l'absurde qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) < 0$. Alors, comme f est supposée décroissante, pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq f(a) < 0$. Ceci contredit la définition de la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 8-103 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Réponse :

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ une période de f. On définit $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_0 + nT) = f(x_0)$. Comme x_0 est arbitrairement choisi, on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = l$. En d'autres termes, f est la fonction constante de valeur l.

Exercice 8-104

1. Soient $n \in \mathbb{Z}$ un entier naturel impair et $a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admette une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas n est pair.

Réponse :

1. *Preuve algébrique* : Pour tout $x \in \mathbb{C}$, les propriétés élémentaires de la conjugaison complexe et le fait que chaque coefficient a_i soit réel impliquent que $f(\overline{z}) = a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0$. Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(\overline{z}) = 0$ si et seulement si $f(z) = 0$. Ainsi, le nombre de racines imaginaires de f est pair. L'hypothèse de l'exercice nous montre alors que f a au moins une racine réelle.

   Preuve analytique : Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. On note $a_{2n+1}x^{2n+1}$ son terme de plus haut degré ($n \in \mathbb{N}$). Quitte à considérer $-P$, on peut toujours supposer a_{2n+1} strictement positif. On a alors $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. De plus, P est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, P admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$. Le choix de P étant arbitraire, le résultat reste valable pour tout polynôme à coefficients réels de degré impair.
2. Voici un contrexemple bien simple : $x^2 + 1 = 0$.

Exercice 8-105 Supposons que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$. (Indication : si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ alors on a un tel point c, sinon appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$.)

Réponse :

On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0; 1]$ avec $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, soit $f(x_0) = x_0$.

Exercice 8-106 Étudier la continuité de la fonction $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Réponse :

f est continue en tout $x \in [-2,2] \setminus \{0\}$ par des résultats généraux de cours puisque quand $x \neq 0$, f est composée de fonctions simples. Au point $x = 0$, $f(0) = 0$, et $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin(\pi/x) = 0$ car la fonction sin est bornée. On déduit alors que f est continue.

Exercice 8-107 Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie par $g_m(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ est une fonction continue.

Réponse :

Débrouillez-vous !

Exercice 8-108

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}$$

Réponse :

1. Soit $T > 0$ une période de f. Sur $[0, T]$, $|f|$ est majorée par un certain M car f est continue sur un intervalle fermé borné. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - nT \in [0, T]$ pour $n = \mathrm{E}\left(\frac{x}{T}\right)$. Donc $|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M$, ce qui montre que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto \sin^8(x) + \cos^{14}(x)$ est continue, périodique sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée et il existe deux réels m et M strictement positifs tels que pour tout réel x, $m < \sin^8(x) + \cos^{14}(x) \leq M$. Donc pour tout réel $x > 0$, $\frac{\ln x}{x\,M} < \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)} < \frac{\ln x}{x\,m}$. Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)} = 0$.

Exercice 8-109 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Réponse :

La composée $g \circ f$ est bornée parce que g est continue ; la composée $f \circ g$ est bornée parce que f est bornée. C'était un peu succinct comme réponse. C'est un bon exercice et une bonne révision de cours de fournir les détails.

Exercice 8-110 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.
2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$
Montrer qu'il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Réponse :

1. Soit $x_0 \in [a;\, b]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [a;\, b], \quad |x - x_0| < \epsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \epsilon$$

Cela montre que f est continue en x_0. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [a;\, b]$, la fonction f est continue sur $[a;\, b]$. Soit φ la fonction définie sur $[a;\, b]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. On a $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in [a;\, b]$ et $\varphi(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \in [a;\, b]$. Comme la fonction φ est continue sur $[a;\, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in [a;\, b]$ tel que $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

2. D'après la question 1., il existe $x \in [a;\, b]$ tel que $f(x) = x$. Montrons l'unicité de x. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x_1 \in [a;\, b]$ et $x_2 \in [a;\, b]$ avec $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$. On a donc $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$, soit $|x_2 - x_1| < |x_2 - x_1|$, ce qui est impossible. Donc, il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 8-111 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :

$$(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|)$$

2. En utilisant la question précédente, montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.

Réponse :

Pour le premier point, la raison est la continuité de la fonction valeur absolue : $x \mapsto |x|$. Le deuxième point en découle quitte à utiliser le fait la somme, respectivement la différence, de deux fonctions continues est continue.